Segundo Examen Parcial de Probabilidad II (Valor esperado)

Nombre: ____ Fecha:

1. Sea X una variable aleatoria para la cual $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$, y sea c una constante arbitraria. Demostrar que
   $E[(X-c)^2] = (\mu-c)^2 + \sigma^2$.
2. Suponga que X representa un punto seleccionado al azar del intervalo [0, 1] en el eje x, e Y es un punto seleccionado al azar del intervalo [0, 1] en el eje y. Suponga que X e Y son independientes. ¿Cuál es el valor esperado del área del triángulo formado por los puntos (X, 0), (0, Y) y (0, 0)?
3. Suponga que se lanzan dos dados justos. Encuentra el valor esperado del producto de las caras que se muestran.
4. Si X y Y tienen función de densidad conjunta $f(x,y) = \frac{1}{x^2y^2} \; x \geq 1, \; y \geq 1$
   a) Calcular la función de densidad conjunta de U = XY, V = X/Y
   b) ¿Cuáles son las densidades marginales?
5. La densidad conjunta de X y Y es dada por
   $$f(x,y) = \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y} \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$
   Calcular $E[X^3|Y = y]$
6. Una urna contiene 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Dos muestras aleatorias sucesivas de tamaños 3 y 5, respectivamente, son extraídas de una urna sin reemplazo. Sean X y Y que denotan el número de bolas blancas en las dos muestras, y calcular $E[X|Y=i]$ para i = 1, 2, 3, 4.
7. Sean X_1, X_2, y X_3, variables aleatorias normales unitarias e independientes. Si $Y_1 = X_1+X_2+X_3$, $Y_2 = X_1-X_2$, $Y_3 = X_1-X_3$, calcular la función de densidad conjunta de Y_1, Y_2, Y_3.