Repaso 1

Espacio de Probabilidad

Fecha de entrega:

Agosto 26, 2020

1. Seleccionamos un número real x y sean los sucesos $A = \{x : 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x : 3 \leq x \leq 7\}$ y $C = \{x : x \leq 0\}$. Indicar quiénes son los sucesos :

   (a) A^c

   (b) $A \cup B$

   (c) $B \cup C^c$

   (d) $A^c \cup B^c \cup C^c$

   (e) $(A \cup B) \cap C$

2. Si A, B y C son sucesos de un espacio muestral Ω, hallar el conjunto que representa a cada uno de los sucesos:

   (a) Alguno de los sucesos A o B ocurre.

   (b) Al menos dos de los sucesos A, B o C, ocurren.

   (c) Ninguno de los sucesos A, B , C ocurre.

   (d) Exactamente uno de los sucesos A, B, C, ocurre.

   (e) A y B ocurren, pero C no.

   (f) Ocurren exactamente dos de los sucesos A, B, C.

3. Sea Ω un espacio muestral. Mostrar que la colección de conjuntos $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ es una σ–álgebra.

4. Sea Ω un espacio muestral finito y sea $\mathcal{P}(\Omega)$ el conjunto de todos los subconjuntos posibles de Ω. Probar que es σ–álgebra y calcular el número de elementos que tiene $\mathcal{P}(\Omega)$.

5. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

   (a) Si $P(A) + P(B) > 1$ entonces $A \cap B = \emptyset$.

   (b) $P(A) = P(B) = p \Rightarrow P(A \cap B) = p^2$.

   (c) $P(A) = P(\bar{B}) \Rightarrow \bar{A} = B$.

   (d) $P(A) = 0$ y $P(B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = 0$.

siendo A, B dos sucesos de un espacio probabilístico.

6. Sea $\Omega = \{a, b, c\}$, $P(\{a, b\}) = 0.7$ y $P(\{b, c\}) = 0.6$. Computar las probabilidades de $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c\}$.

7. Probar que si A y B son sucesos tales que $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ y $P(A \mid B) > P(A)$, entonces, $P(B \mid A) > P(B)$

8. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 1/2$, $P(A \cup B) = 3/4$ y $P(B) = 5/8$. Hallar la probabilidad de: $A \cap B$, $A^c \cap B^c$, $A^c \cup B^c$ y $B \cap A^c$.

9. El número n de fallos de un dispositivo durante un día tiene probabilidad $(1/e)(1/n!)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Si se producen n fallos, el sistema deja de funcionar con probabilidad $1 - (1/e)^n$. Calcular la probabilidad de que el dispositivo haya tenido n fallos supuesto que ha dejado de funcionar.

10. A altas horas de la madrugada un individuo regresa a su casa. Sólo puede abrir la puerta con una determinada llave de entre las cinco que dispone en el llavero. El portal de la casa está oscuro y no puede distinguir las llaves entre sí. El mejor método para abrir la puerta sería ir probando las llaves de una en una, eliminando las que no abran. Pero esta feliz idea se le ocurre con probabilidad $0,1$ debido al lamentable estado en que regresa. El otro método consiste en probar al azar las llaves, sin eliminarlas, hasta abrir la puerta.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que abra la puerta al tercer intento?

    b) Si abre la puerta al tercer intento, ¿qué método es el más probable que haya utilizado?