Tareas de clase y de casa

Probabilidad II

Distribuciones Conjuntas

Ejemplo 1

- Se extraen dos pastillas de un frasco que contiene 2 pastillas para infección estomacal, 3 aspirinas para el dolor de cabeza y 4 para la gripa. Si X y Y denotan el número de aspirinas, y de pastillas para infección estomacal respectivamente extraídas del frasco, determinar las probabilidades de todas las posibles parejas (x,y) que puedan darse. Además calcular $F(1,1) = P(X \leq 1, Y \leq 1)$, $F(-1,1)$.

Solución

- Para determinar las posibles parejas de valores, veamos que puede suceder que ninguna pastilla de los dos tipos salga {(0,0)}, que salga una de los dos tipos {(0,1), (1,0)}, que salgan una y una {(1,1)} o que salgan 2 del mismo tipo {(2,0), (0,2)}

		X		
		0	1	2
	0	1/6	1/3	1/12
Y	1	2/9	1/6	0
	2	1/36	0	0

Solución

- Otra manera de resolver el problema es utilizando una representación por medio de una fórmula del tipo

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

$= \frac{\binom{2}{y}\binom{3}{x}\binom{4}{2-x-y}}{\binom{9}{2}}$ para x = 0, 1, 2; y = 0, 1, 2; 0 ≤ x+y ≤ 2

F(1,1) = f(0,0)+f(0,1)+f(1,0)+f(1,1) = 8/9

F(-1,1) = 0

Ejemplo 2

- Si la función de distribución conjunta de X y Y es:
- $F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})\,(1 - e^{-y})\ para\ x > 0\ y\ > 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad en\ cualquier\ otra\ parte \end{cases}$
- Determinar P(1 < x < 3, 1 < y < 2).

Solución

- Necesitamos determinar la función de densidad de probabilidad, la cual puede obtenerse realizando la diferenciación parcial
- $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(X, Y) = e^{-(x+y)}$, entonces
- $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & para\ x > 0, y > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otra\ parte \end{cases}$
- P(1 < x < 3, 1 < y < 2) = $\int_1^2 \int_1^3 e^{-(x+y)} dx\ dy$ = 0.074

Ejemplo 3

- Un supermercado tiene dos líneas exprés de pago. Sea X e Y el número de clientes en la primer línea y en la segunda, respectivamente, en un momento dado. Durante las horas no pico, la función de distribución conjunta de X e Y se resume en la siguiente tabla:

		X			
		0	1	2	3
Y	0	0.1	0.2	0	0
	1	0.2	0.25	0.05	0
	2	0	0.05	0.05	0.025
	3	0	0	0.025	0.05

- Encontrar $P(|X - y| = 1)$ que es la probabilidad de que X y Y difieren exactamente igual a 1

Solución

- $P(|X - y| = 1) = \sum_{|x-y|=1} \sum p_{x,y}(x, y)$

$$
\begin{aligned}
&= p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(1,2) \\
&\quad + p_{X,Y}(2,1) + p_{X,Y}(2,3) + p_{X,Y}(3,2) \\
&= 0.2 + 0.2 + 0.05 + 0.05 + 0.025 + 0.025 \\
&= 0.55
\end{aligned}
$$

Este resultado nos hace ver que no hay simetría. De igual modo si nos interesaraP(|X-Y|≥ 2) = 0

Ejemplo 4

- Se lanzan dos dados y se definen las variables aleatorias suma (S) y valor absoluto de la diferencia D.
- ¿Cuál es la distribución conjunta de $P(S = x, D = y)$? ¿Y sus distribuciones marginales?

Solución

- La distribución conjunta P(S = x, D = y) es:

					S: SUMA DE DOS DADOS							
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	0	1/36		1/36		1/36		1/36		1/36		1/36
	1		1/18		1/18		1/18		1/18		1/18	
D: DIFERENCIA	2			1/18		1/18		1/18		1/18		
DE DOS DADOS	3				1/18		1/18		1/18			
	4					1/18		1/18				
	5						1/18					

- Sus distribuciones
- marginales son:

						S: SUMA DE DOS DADOS							
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	0	1/36		1/36		1/36		1/36		1/36		1/36	6/36
	1		1/18		1/18		1/18		1/18		1/18		10/36
D: DIFERENCIA	2			1/18		1/18		1/18		1/18			8/36
DE DOS DADOS	3				1/18		1/18		1/18				6/36
	4					1/18		1/18					4/36
	5						1/18						2/36
		1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	

Marginal de *S*

Marginal de *D*

Problemas de clase

Problema 1

- Si X y Y tienen las probabilidades conjuntas que se muestran a continuación

		x		
		0	1	2
	0	1/12	1/6	1/24
Y	1	1/4	1/4	1/40
	2	1/8	1/20	0
	3	1/120	0	0

Determinar:

a) $P(X = 1, Y = 2)$; b) $P(X + Y \leq 1)$; c) $P(X = 0, 1 \leq y < 3)$; d) $P(X > Y)$; e) $F(1.2, 0.9)$; f) $F(2,0)$; g) $F(-3,1.5)$; h) $F(4, 2.7)$.

Problema 2

- Si la función de masa de probabilidad conjunta de X y Y es dada por $f(x, y) = c(x^2 + y^2)$ para x = -1, 0, 1, 3; y = -1, 2, 3, obtener:

- A) el valor de c
- B) P(X = 0, Y $\leq$ 2)
- C) P(X $\leq$ 1, Y > 2)
- D) P(X > 2 – y)

Problema 3

- Probar si

- $f(x, y) = ky(2y - x)$ para x = 0, 3; y = 0, 1, 2

- Es una función de masa de probabilidad conjunta para las variables aleatorias X y Y, para algún valor k real.

Problemas de casa

Problema 1

- Sean X e Y dos variables aleatorias continuas definidas sobre el cuadrado unitario. ¿A qué es igual c si $f(x,y) = C(x^2+y^2)$?

Problema 2

- Una urna contiene cuatro fichas rojas, tres fichas blancas y dos fichas azules. Se extrae una muestra aleatoria de tamaño 3 sin reemplazo. Sea X el número de chips blancos en la muestra e Y el número de chips azules. Escribe una fórmula para la función de densidad de probabilidad conjunta de X e Y.

Problema 3

- Considere el experimento de lanzar una moneda justa tres veces. Sea X el número de caras en el último lanzamiento y que Y denote el número total de caras en los tres lanzamientos. Encontrar $p_{x,y}(x,y)$.

Problema 4

- Encontrar $P(X < 2Y)$ si $f_{x,y}(x,y) = x+y$ para cada X y Y definidas cada una sobre intervalo unitario.

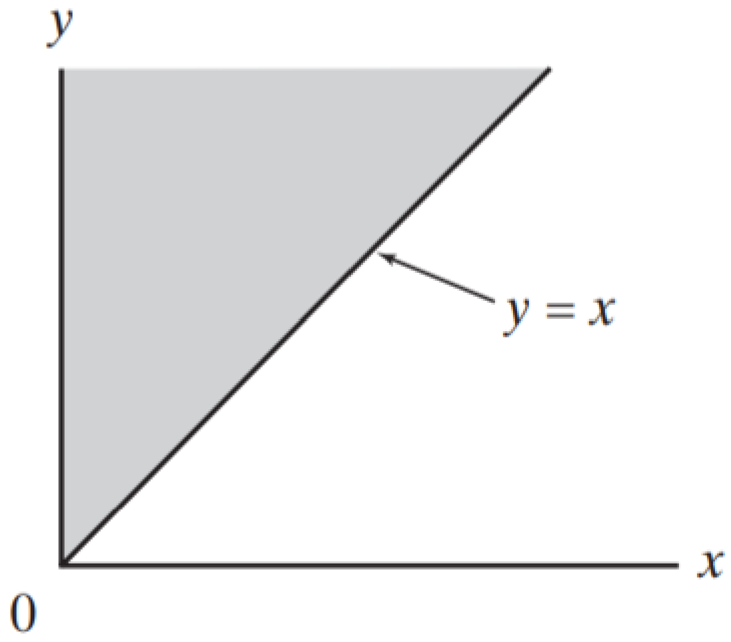
Problema 5

- Para cada una de las siguientes funciones de densidad de probabilidad conjunta, encontrar $f_x(x)$, $f_y(y)$.

(a) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2}, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$
(b) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{2}y^2, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$
(c) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{2}{3}(x + 2y), 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$
(d) $f_{X,Y}(x, y) = c(x + y), 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$
(e) $f_{X,Y}(x, y) = 4xy, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$
(f) $f_{X,Y}(x, y) = xye^{-(x+y)}, 0 \le x, 0 \le y$

Problema 6

- Encontrar $f_Y(y)$ si $f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-x}\, e^{-y}$ para x y y definidos sobre la región sombreada



Problema 7

- Para cada una de las siguientes funciones de densidad de probabilidad conjunta, encontrar $F_{X,Y}(a,b)$.

(a) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{2}y^2, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$
(b) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{2}{3}(x + 2y), 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$
(c) $f_{X,Y}(x, y) = 4xy, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$