

The Tables of the Law (the Normal Law!)

Enrique Lemus-Rodríguez, José Daniel López-Barrientos, José Eliud Silva-Urrutia.
Facultad de Ciencias Actuariales, Universidad Anáhuac.

Abstract

In this work, we present ten lessons that lead to the statement and sketch of the proof of the Central Limit Theorem. Each lesson deals with a fundamental notion with either, a computational, or a heuristic approach that can be extended to an important topic in a full course on Probability Theory.

Key words: De Moivre-Laplace Theorem, Stirling Approximation, Normal Law, Birthday Problem.

Se trata de un artículo surgido de reflexiones y experiencia didácticas con alumnos de probabilidad en cursos regulares y de verano. Esta experiencia permitió una primera aproximación al Teorema de De Moivre – Laplace que integraba las probabilidades discretas, la aproximación numérica y la simulación (vía hojas de cálculo) con los aspectos clave de la muy difícil demostración del Teorema. Al final del texto el lector queda con una visión de conjunto panorámica de aspectos esenciales de la demostración, con lo que adquiere la sensibilidad para entender el porqué del Teorema. Un porcentaje de los lectores posteriormente se podrían interesar por la demostración matemática completa detallada, tal como aparece en textos como Feller, Chung, Shiryaev o Gnedenko.

Primero se ofrece un panorama del tema y luego se hace una paráfrasis haciendo una lista de “diez mandamientos” probabilísticos.

Al explicar la relación entre la distribución binomial y el Teorema de De Moivre – Laplace, la primer clave es el estudio de los factoriales y la aproximación de Stirling. Tomando ideas del “folklore” probabilístico motivamos dicha aproximación a través del problema de los cumpleaños. Aquí se desarrolla la primer cuaterna: problema, solución esquemática, estructura matemática y práctica con hoja de cálculo. Un enorme esfuerzo se invirtió en acompañar cada cuaterna con ilustraciones sobrias pero a colores para mayor vividez.

La motivación de la aproximación de Stirling requiere de familiaridad con la función logaritmo natural, algo que en nuestra experiencia es poco frecuente: en el texto se retoma la relación entre el logaritmo y las áreas bajo la hipérbola equilatera a través de diagramas diseñados con mucho cuidado y actividades con hoja de cálculo, para completar la segunda cuaterna.

En un claro homenaje a Euler, el análisis del número e y su relación con el lím $(1 + 1/n)^n$ se desarrolla en la tercera cuaterna.

Con estos resultados preliminares se cuenta ya con un fuerte andamiaje matemático con una intuición cimentada en actividades concretas y experimentos vía hoja de cálculo.

La penúltima cuaterna es un pequeño “tour de force” que relaciona el Triángulo de Pascal, el árbol binomial y las variables aleatorias Bernoulli y Binomial.

El texto alcanza la “resolución” de la tensión dramática entre los personajes-intérpretes de esta “cantata” matemática: en una confrontación en la cual factoriales, Stirling, logaritmos y el número e nos develan la nueva forma que surge tras el histograma Binomial, la densidad Normal.

En un epílogo comentamos sobre diversos aspectos de esta hermosa polifonía matemática, que en la mayoría de los cursos de Probabilidad no se alcanza a expresar con toda su sonoridad.