

Una propuesta educativa para promover el aprendizaje del concepto de factorización de polinomios algebraicos

Gerardo Irwin Téllez Vega girwint21@gmail.com

BUAP

Experiencias de desarrollo o aplicación de software. Modalidad: sesión por video.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación se empezó con el análisis los errores cometidos en los estudiantes de educación media superior en la factorización de polinomios. Después de revisar algunos artículos que hablaban sobre las factorizaciones, se hace la propuesta de que un cambio en la enseñanza, tomando como referencia a algunos trabajos sobre la instrucción de factorizar con áreas, se piensa que los trabajos realizados por Fernando Soto y José Martín Villarroel puedan contribuir positivamente en el aprendizaje de la factorización de polinomios. El trabajo didáctico que se propone tiene el objetivo apoyar el aprendizaje de los estudiantes de nivel medio superior. El enfoque es de materia escolar ya que, para grados posteriores de nivel medio superior, el tema de la factorización de polinomios se toma como aprendizaje base en otro tipo de conceptos como lo son:

- Encontrar las raíces de funciones polinómicas.
- Operaciones con fracciones algebraicas.
- Determinar elementos en ecuaciones de cónicas en geometría analítica.
- Aplicación de métodos de integración en cálculo, entre otros temas.

La investigación pretende generar conocimiento acerca de una propuesta que sea posible considerar para ayudar en la comprensión del tema de factorización.

La metodología será un estudio instrumental de casos de tipo cualitativo, donde se utilizará la descripción para comprender el estudio de caso. En el trabajo se identificarán los tipos de tareas y las técnicas que se les plantean a los estudiantes con el uso del software caja de polinomios, con estas actividades se pretende observar posibles técnicas que los estudiantes produzcan, así como posibles dificultades con la representación de la caja de polinomios, es decir, la valencia instrumental y semiótica.

Se diseñan inicialmente actividades para usar materiales manipulativos, tangibles y que pudieran realizar los participantes. Debido a la contingencia sanitaria por COVID-19, las actividades diseñadas para aplicarse de forma presencial a jóvenes media superior, se modificaron de tal forma que se puedan aplicar en línea y con el apoyo de plataformas virtuales. En el trabajo de Villarroel se habla de un software desarrollado por Edwin Insuasty y Fernando Soto de formato html, el cual se logra encontrar y descargar para explorar su uso y entender la interfaz del programa. Con ello se logra que el software “caja de polinomios” se instale en las computadoras de menor número de participantes, se modificarán las actividades iniciales y se aplicará la propuesta a jóvenes de nivel medio superior para posteriormente analizar los resultados obtenidos.

Palabras clave: Factorización, software, polinomios, representaciones, plataforma virtual

Abstract

The present research work began with the analysis of the errors made in upper secondary education students in the factorization of polynomials. After reviewing some articles that spoke about factoring, it is proposed that a change in teaching, taking as reference some works on the instruction to factorize with areas, it is thought that the works carried out by Fernando Soto and José Martín Villarroel they can contribute positively in the learning of the factorization of polynomials. The didactic work that is proposed has the objective of supporting the learning of upper secondary level students. The focus is on school subjects since, for later grades of upper middle level, the issue of factoring polynomials is taken as base learning in other types of concepts such as:

- Find the roots of polynomial functions.
- Operations with algebraic fractions.
- Determine elements in conic equations in analytical geometry.
- Application of integration methods in calculation, among other topics.

The research aims to generate knowledge about a proposal that can be considered to help in understanding the factorization issue. The methodology will be an instrumental case study of a qualitative type, where the description will be used to understand the case study. The work will identify the types of tasks and techniques that students are presented with the use of the polynomial box software, with these activities it is intended to observe possible techniques that students produce, as well as possible difficulties with the representation of the polynomial box, that is, the instrumental and semiotic valence. Activities are initially designed to use manipulative, tangible materials that participants can do. Due to the health contingency due to COVID-19, the activities designed to be applied in person to upper-middle-aged youth, were modified in such a way that they can be applied online and with the support of virtual platforms. Villarroel's work talks about software developed by Edwin Insuasty and Fernando Soto in html format, which can be found and downloaded to explore its use and understand the program's interface. With this, the "polynomial box" software is installed on the computers with the smallest number of participants, the initial activities will be modified and the proposal will be applied to young people of upper middle level to later analyze the results obtained.

Keywords: Factoring, software, polynomials, representations, virtual platform

Planteamiento del problema

Para el apropiamiento de nuevos conceptos, el ser humano comete errores como parte natural del proceso de formación de conocimientos, y aprender matemáticas no es la excepción. Dentro del aprendizaje de las matemáticas se generan dificultades que recaen en el transcurso de instrucción o el proceso de adquisición de las nuevas ideas que se van generando. En el desarrollo de ejercicios que realizan los estudiantes se pueden observar los errores cometidos y también detalles que nos pueden llevar a las causas. Dependiendo del enfoque que se plantee para estudiar los errores y dificultades que se presenten en los estudiantes se abordará un tema en particular como la formación de conceptos de los alumnos, la manera de enseñar y los temas que se abordan en el aula (García, 2010).

En la materia de álgebra, se presentan dificultades cuando al estudiante se le presenta una letra como la representación de un número general, como un elemento que cambia de valor o como una relación entre valores. Este paso de la aritmética al álgebra marca una referencia en dificultades matemáticas por parte de los escolares. Parte de un inicio en la impartición de la educación secundaria, y continúa en grados superiores dentro del marco curricular.

En el caso de álgebra, hablando de las letras como números generales, se toca un tema llamado factorización de polinomios, y dentro de este tópico se presentan diversos obstáculos en la captación de los tratamientos necesarios para la resolución de operaciones de carácter algebraico.

Como lo mencionan Caballero y Juárez (2016):

... “los alumnos de nivel superior efectivamente tienen problemas de maduración, tales como aplicar parcialmente una fórmula, omitir signos, desarrollar expresiones algebraicas. Estos problemas no son de fácil solución, sin embargo, el profesor puede detectar y resolver si existe la cooperación del alumno. No obstante, otras veces se han observado problemas de maduración de tal magnitud que pareciera que se originaron desde varios niveles anteriores”. (p. 35)

En el trabajo mencionado, se hace referencia a la factorización de polinomios ya que, en algunos casos, es necesaria para realizar la adición o sustracción de fracciones algebraicas, entre otras operaciones matemáticas que requieren de un manejo algebraico.

En el artículo de Baltazar, Rivera, Martínez, Cárdenas y Anaya (2015), reportan las dificultades de estudiantes de octavo grado (un equivalente a segundo de secundaria) en la factorización de polinomios. Dicho trabajo hace una descripción de observaciones relacionadas a las dificultades y errores que presentan algunos alumnos al enfrentarse a los procesos que son necesarios para factorizar los términos algebraicos que se le plantean. La mayoría de las equivocaciones cometidas por los estudiantes y que son expresadas en el artículo están relacionados con la utilización de los signos, el valor que atribuyen a las letras y a la forma de trabajo en grados anteriores así como también por la concentración e interés por la asignatura; los desaciertos más frecuentes analizados por los investigadores se dan por la mala utilización e interpretación de los signos y por la alteración de las operaciones lo cual generó conflictos en los estudiantes a la hora de resolver ejercicios.

Un ejemplo de errores cometidos en la factorización es en la aplicación parcial de regla de factorización por factor común: Este error se presenta cuando el alumno intenta separar los factores comunes, pero no recuerda el paso siguiente del procedimiento dejando inconclusa la operación o no verifica la validez del factor común, así como no respetar las reglas de los exponentes del citado factor (García, 2010).

Otro ejemplo lo da Méndez (2012):

... “al factorizar polinomios cuadráticos: primero, no comprenden que deben encontrar dos polinomios irreducibles, que al multiplicarlos den la expresión original y el segundo aspecto, encontrar dos números, que dependen de operaciones claramente establecidas, entre los coeficientes del polinomio y que permitan su factorización. Estas dos dificultades no pueden ser resueltas solo considerando el marco algebraico, como se evidencia en el análisis de los procedimientos y conocimientos que hay que poner en juego al factorizar.”
(p.1396)

Los análisis de errores que cometen los estudiantes de matemáticas dentro de operaciones matemáticas sirven para observar el aprendizaje del estudiante, darle un seguimiento y en el caso docente, identifica la problemática acerca de los temas que les presentan con mayor dificultad. Ya que la enseñanza de factorización en ambiente de lápiz y papel, requiere de reglas que clasifican los polinomios y necesitan de su manejo sintáctico (Mejía 2008).

De acuerdo con Baltazar et al. (2015, p.678): “se deben implementar metodologías que contengan recursos didácticos y clases teórico prácticas más dinámicas que despierten el interés en el estudiante y, a través de esto, lograr que desarrollen habilidades mentales que fortalezcan su aprendizaje”.

Marco Teórico

Concepto de factorización

La factorización es un cambio en la representación de términos algebraicos, representando un polinomio como el producto de sus factores o divisores.

En matemáticas, la definición de polinomio es:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Donde n representa el grado del polinomio.

En el dominio de los polinomios, podemos expresar dos polinomios de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

$$\text{Con } a_n, b_m \neq 0, \quad n \geq m$$

De acuerdo con Kurosch (1968), se le llama producto de los polinomios $f(x)$ y $g(x)$, al polinomio:

$$f(x) \cdot g(x) = d_0 + d_1 x + \dots + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + d_{n+m} x^{n+m}$$

Cuyos coeficientes se determinan del modo siguiente:

$$d_i = \sum_{k+l=i} a_k b_l, \quad i = 0, 1, \dots, n+m-1, n+m$$

Donde denominaremos $q(x)$ al producto de los factores $f(x)$ y $g(x)$.

Dados los dos polinomios $q(x)$ y $f(x)$. Si $q(x)$ se divide (o es divisible) por $f(x)$, entonces el polinomio $f(x)$ se llama divisor del polinomio $q(x)$. Entendiendo que el polinomio $f(x)$ es divisor del polinomio $q(x)$ si, y solo si, existe un polinomio $g(x)$ que satisfaga a la igualdad:

$$q(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Entonces podremos llamar a $f(x)$ y $g(x)$ factores y divisores del polinomio $q(x)$ (Kurosch, 1968).

Si decimos que $f(x)$ y $g(x)$ dividen a $q(x)$, entonces $f(x), g(x) \neq 0$.

El concepto de factorización se desarrolla de forma operacional desde la secundaria, observándose como una manipulación de expresiones, porque antes de realizar cualquier tratamiento, uno debe de reconocer el tipo de expresión que se va a cambiar, tomando en cuenta que existe un procedimiento individual para un determinado polinomio.

Por ejemplo, si al alumno se le presenta el término $5x^2y$, puede saberse que sus factores quedarían como: $5x^2y \rightarrow 5 \cdot x \cdot x \cdot y$; pero si se le presentara el polinomio $x^2 + 6x + 9$, se descompone en factores de distinta naturaleza (Méndez, 2012).

Las distintas formas en que un polinomio se puede manipular para expresarlos de una manera distinta, dependerán del dominio y usos de saberes en álgebra como: reducción de términos semejantes, multiplicación y división de polinomios. Además de conocer reglas o leyes que desde la aritmética se manejan, tales como: reglas de signos para multiplicar o dividir, leyes de exponentes y radicales.

Teoría de registros de representaciones Semióticas, Raymond Duval.

Como se expresa anteriormente, la factorización es una representación de un producto, por lo cual se usa una parte de la teoría de representaciones semióticas de Duval ligada a los conceptos de semiosis y noesis. Al igual que las transformaciones y conversiones entre tipos de registros.

En la figura 1, podemos notar las diferentes formas de representar el número 7, una vez que se comprende:

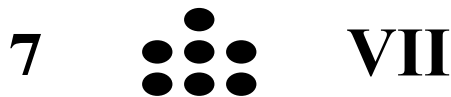


Figura 1. Representaciones del número 7.

La teoría de representaciones de Duval (1993) nos dice que

... “la aprehensión de un objeto matemático es una aprehensión conceptual y la actividad sobre los objetos matemáticos se da sólo por medio de las representaciones semióticas”

Duval (1999) nos señala que la actividad ligada a la producción de una representación se le llama *semiosis* y a la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos *noesis*. No hay semiosis sin

noesis. En este planteamiento, una vez lograda la aprensión de conceptos, es posible hacer una representación semiótica en diferentes tipos de registros. La formación identificable de representaciones, en primera instancia una representación mental, un tratamiento, que es una transformación interna y una conversión que es una representación distinta al registro original. Esto nos indica que, al llevar a cabo la representación de un objeto matemático en distintos registros, se logrará una mejor comprensión de éste. Dado que al pasar de un registro a otro se pueden apreciar características diferentes que no se aprecian en una sola y única representación. Por lo que el área de una figura plana también puede tener distintos registros de representación como se muestra en la figura 2:

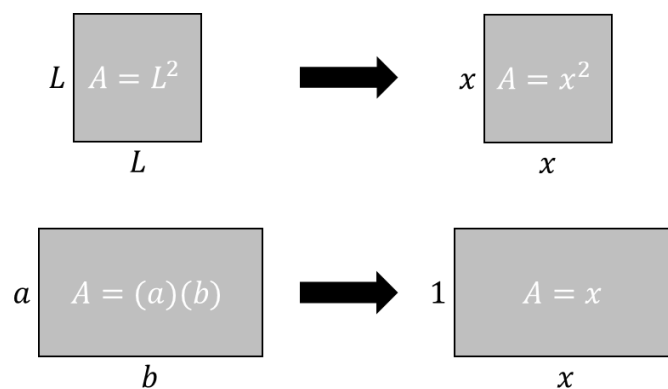


Figura 2. Cambio de representaciones del área de un cuadrado (superior) y un rectángulo (inferior)

De acuerdo con Soto et al. (2005) mencionan que del matemático árabe Tabit ibn Qurra al-Harrani nace la idea de representar una ecuación cuadrática $x^2 + px + q = 0$ como una suma de áreas utilizando la unidad de medida μ y expresando la ecuación como $x^2 + p\mu x + q\mu^2 = 0$, lo que este proceso se le conoce como homogeneización y da la representación de la siguiente manera en la figura 3:

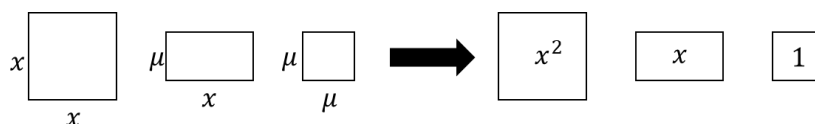
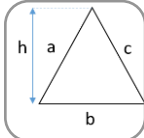
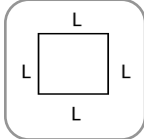
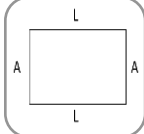


Figura 3. Interpretación geométrica de Tabit (Soto et al. 2005)

Desde la educación básica y media, se ha enseñado el concepto de áreas y perímetros de figuras geométricas con fórmulas donde las letras representan la longitud de los lados de una figura, éstas ya son una representación algebraica con operaciones básicas. Un ejemplo se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 1. Áreas y perímetros de algunas figuras geométricas

Áreas y perímetros de figuras geométricas	
	Perímetro: $a + b + c$ Área: $\frac{b \cdot h}{2}$
	Perímetro: $4L$ Área: L^2
	Perímetro: $2L + 2A$ Área: $L * A$

Y utilizando términos algebraicos podría darse otro tipo de representaciones, tales como los mostrados en la figura 4:

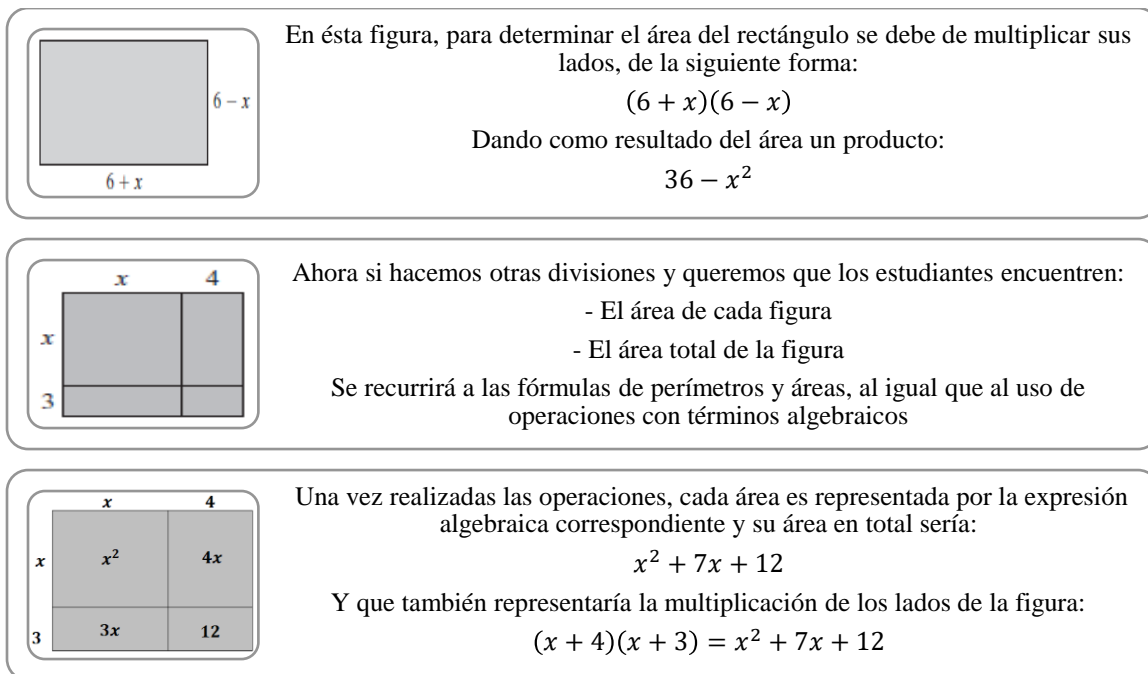


Figura 4. Esquema de representaciones de la factorización.

Al ir realizando este tipo de actividades, se pretende que el estudiante vaya relacionando sus conceptos previos de geometría con los de álgebra básica. De esta forma puede aplicar suma de términos, multiplicaciones e ir distinguiendo entre números y variables. El objetivo se centraría en que pueda manejar hasta dos tipos de representaciones para que adquiera un aprendizaje significativo.

Aprendizaje Significativo, David Ausubel.

Existen varias teorías del aprendizaje, para este trabajo de investigación basaremos en el aprendizaje significativo de David Ausubel (1976), y de éste, solo nos enfocaremos en el proceso de asimilación. Por asimilación, entendemos el proceso mediante el cual “*la nueva información es vinculada con aspectos relevantes y preexistentes en la estructura cognoscitiva, proceso en que se modifica la información recientemente adquirida y la estructura preexistente*”.

De acuerdo con Ausubel (citado en Ospina, 2015), *un aprendizaje es significativo cuando se presenta una nueva información a los estudiantes, relacionando sus conocimientos previos para poder asimilar los nuevos conceptos*. La interacción con estos nuevos contenidos los llama

subsumidores. Esta nueva información es dotada de un significado por el aprendiz. Por lo que debe haber una predisposición positiva para aprender.

Esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras. El subsumidor prácticamente no se modifica, la nueva información se hace parte de esa estructura de conocimiento.

Con estas definiciones, se pretende que los materiales con los que se piensa abordar el tema de factorización tengan un carácter significativo. Para que los materiales sean significativos requieren:

- Que el material tenga significado lógico, esto es, que sea potencialmente relacionado con la estructura cognitiva del que aprende, de manera no arbitraria y sustantiva.
- Que existan ideas de anclaje o subsumidores adecuados en el sujeto que permitan la interacción con el material nuevo que se presenta.

De acuerdo con Ausubel (1976), los subsumidores son conceptos previos del estudiante que se hacen presentes cuando se está aprendiendo un nuevo conocimiento.

En caso de ser necesario el docente tendría que previamente, construir organizadores que le sirvan de anclaje para enseñar el nuevo concepto (Ospina, 2015). Se espera con esto, manipular la estructura cognitiva con el fin de facilitar el aprendizaje significativo, y que sirva de puente entre lo que el aprendiz ya sabe y lo que él precisa saber. Los organizadores previos pueden ser discusiones, demostraciones, videos, experimentos, ejemplos cotidianos, etc.

Los conocimientos previos para el desarrollo y utilización de los materiales que se pretenden en esta investigación, son los conceptos de área de figuras planas, el plano cartesiano y multiplicación de polinomios.

La caja de Polinomios

La caja de polinomios es un programa de apoyo al estudio de la operatividad de los polinomios y la factorización desarrollado en 2005 por Edwin Insuasty, Oscar Fernando Soto y Jesús Insuasti, adscritos a los grupos de investigación GESCAS y Galeras.NET de la Universidad de Nariño (Fernández, D y Ocoró, D., 2015).

El demo digital de la caja de polinomios (figura 5) es un programa gratuito o de licencia libre en formato html desarrollado por el grupo Gescas de la Universidad de Nariño (Colombia), para representar las operaciones básicas de la suma, resta, multiplicación, división y factorización de polinomios en una variable en el plano cartesiano.



Figura 5. Software Caja de polinomios Grupo GESCAS

Este DEMO Virtual está dirigido a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, Licenciaturas con énfasis en Educación Básica para que sea usado como una herramienta de apoyo en la enseñanza de los polinomios y para estudiantes de Licenciatura en Informática como un ejemplo de aplicaciones computacionales interactivas en páginas WEB que corren del lado del cliente.

Este software contiene bases del trabajo desarrollado por Soto et al (2005), es el instrumento que utilizaré para auxiliar en el tema de factorización, se desarrollarán actividades para utilizarlo y analizar el alcance sobre el avance de la comprensión en lo estudiantes.

Implementación y análisis de resultados.

Los resultados están en proceso en esta parte del trabajo de investigación debido a la pandemia por COVID-19. Dado que no se permite la manifestación de personas, fue difícil hacer la aplicación de actividades con un grupo numeroso de estudiantes, por lo que se contactó a unos cuantos, para trabajar con ellos a distancia por medio de la aplicación de Zoom, como se muestra en la imagen 1:



Imagen 1. Clase en plataforma Zoom

Como parte de la actividad, se les pidió a los estudiantes que, durante la sesión en la plataforma de Zoom, compartieran la pantalla realizando las actividades indicadas, como se muestra en la imagen 2.

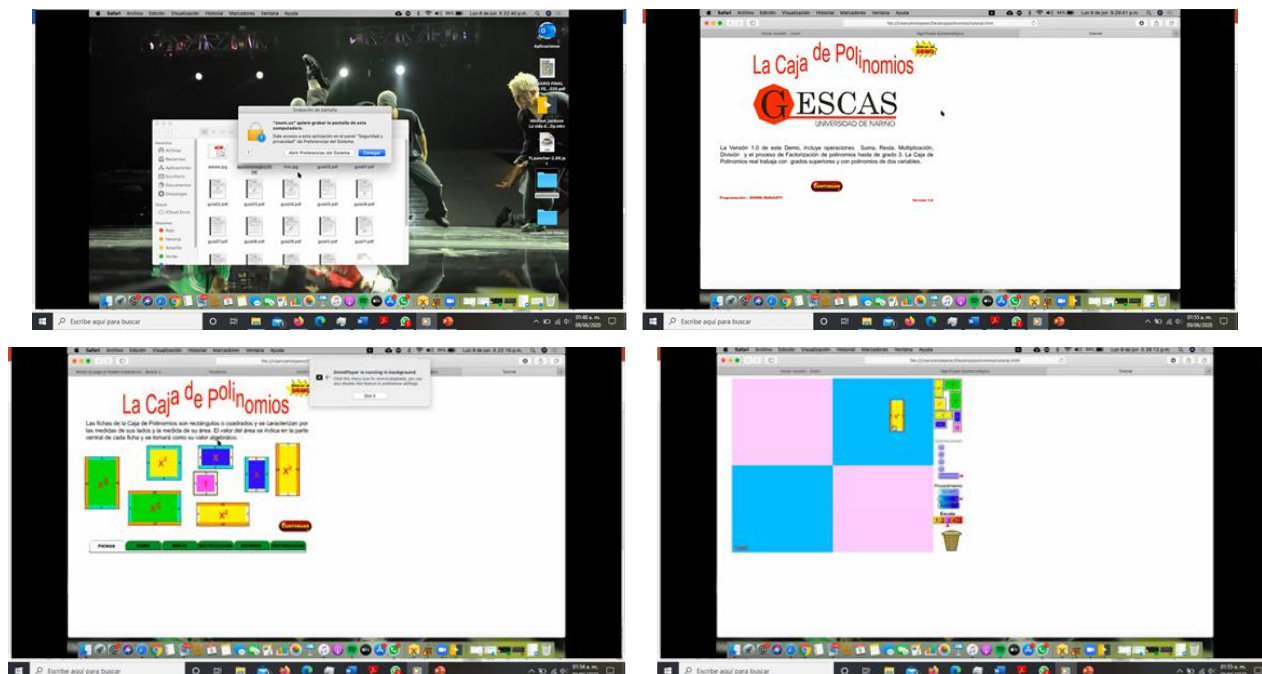


Imagen 2. Compartición de pantalla con actividad.

Previo a esta actividad, se les mandó un Formulario de Google diseñado con la primer actividad denominada Organizador previo (imagen 3). Esta actividad se pensó como actividad presencial inicialmente, pero se modificó debido a la contingencia (puede consultarse el anexo 1).



The image shows a Google Form titled "Organizador previo 1". At the top, there is a header with "Preguntas" and "Respuestas" tabs. Below the header is an illustration of a bookshelf with several books. The main content area contains the following text:

Organizador previo 1

Antes de iniciar trabajaremos los conceptos previos de áreas, sobre todo de un cuadrado y un rectángulo que van a ser la base fundamental para la implementación de la caja de polinomios. Esta actividad iremos relacionando la obtención de áreas de algunas figuras geométricas y el uso de letras.

Instrucciones: con base en el formulario que se te ha proporcionado, contesta los ejercicios.

Escuela de Procedencia: *

Texto de respuesta corta

Imagen 3. Organizador previo

Se estableció comunicación con ellos por medio de WhatsApp, se les mandó instrucciones, el software, video de instalación y enlaces a formularios por medio de correo electrónico. Se les envió la primera actividad por vía Formularios de Google, obteniendo resultados como los siguientes:

En esta primera respuesta (imagen 4), la estudiante 1, muestra que puede relacionar los lados de la figura con letras diferentes a las escritas en la fórmula dada, o similar, estableciendo un cambio de registro.

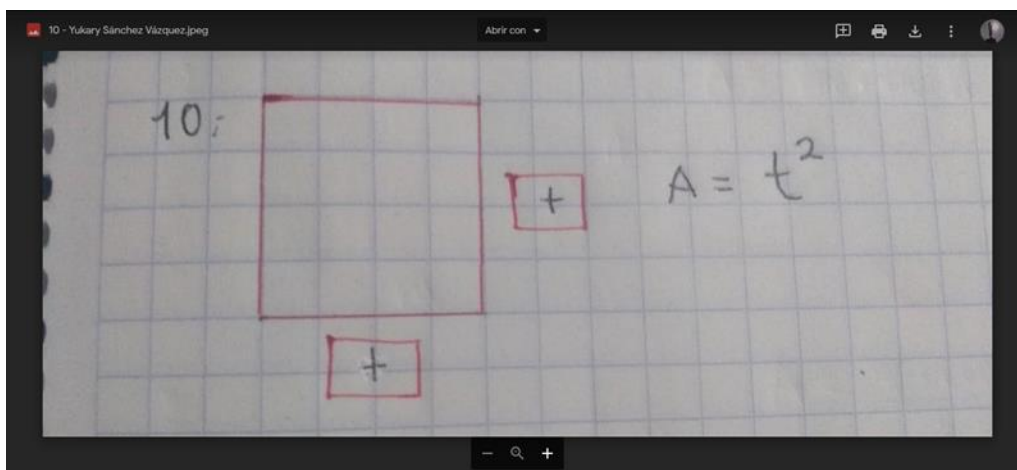


Imagen 4. Respuesta de estudiante.

La siguiente respuesta por la estudiante 2 (imagen 5), también muestra que puede cambiar las literales que representan los lados del polígono que se le da y aplicar la fórmula correcta para determinar su área.

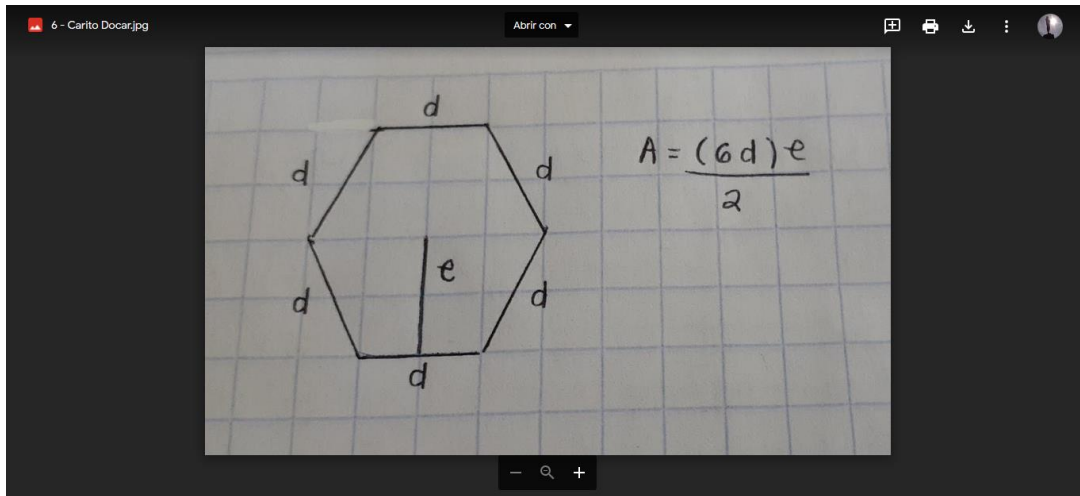


Imagen 5. Respuesta de estudiante.

La tercera estudiante, también muestra facilidad al cambiar los registros de representación de los lados del trapecio llegando a una respuesta aceptada para determinar el área de la figura plana.

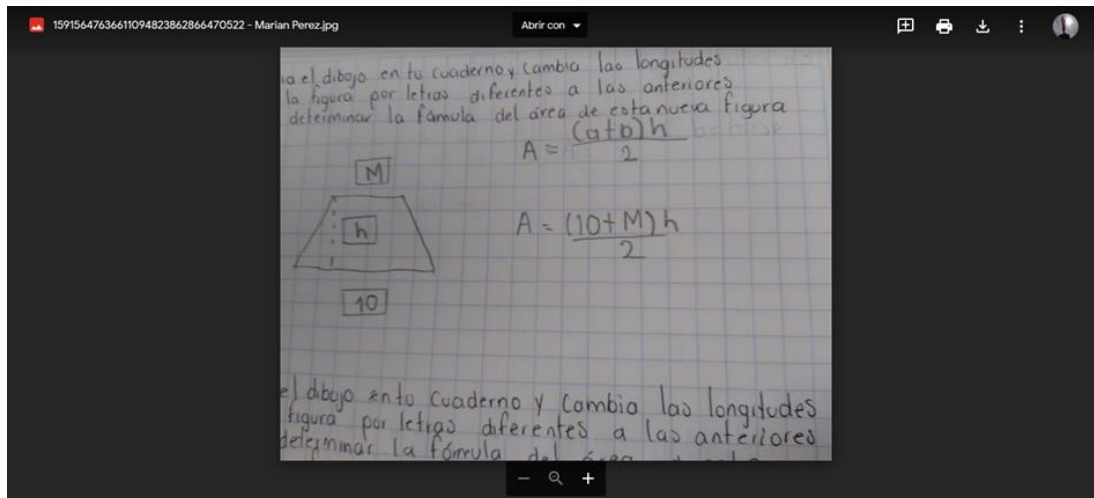


Imagen 6. Respuesta de estudiante.

Comentarios

Por el momento, se continúa con la revisión de actividades para aplicar con los participantes y la revisión de algunas respuestas de actividades ya aplicadas. Como menciono, dada la situación de la contingencia por COVID-19, las actividades que ya estaban preparadas para aplicar de manera presencial se tuvieron que rediseñar y cambiar el formato. Inicialmente se planeaba que los estudiantes tuvieran un material manipulativo tangible y que las observaciones se hicieran interactuando con un grupo de jóvenes, dentro de un aula.

Este cambio, con las adecuaciones, se buscó que ahora fuera de manera virtual, por lo que llevó a la revisión de plataformas digitales y con suerte se encontró que el software “caja de polinomios” fuera de libre acceso. Se tuvo que hacer una clase vía plataforma Zoom para resolver dudas de instalación debido a que había entre los participantes quienes contaban con sistema Windows y otros con sistema iOS.

Se continúa trabajando con los participantes voluntarios para adecuar horarios y grupos de trabajo para llevar a cabo las sesiones de Zoom y que se haga el registro de las actividades.

Referencias

- Aguilar, Bravo, Gallegos, Cerón y Reyes (2015). Álgebra. Colegio Nacional de Matemáticas, México: Editorial Pearson Educación.
- Ausubel, D. P. (1976). Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas.
- Baltazar, A., Rivera, J., Martínez, R. Cárdenas, H., Amaya, T. (2015). Errores y dificultades que presentan los estudiantes de octavo grado al factorizar polinomios. Descargado el 27 de Marzo de 2019, de ALME Acta latinoamericana de matemática educativa. Sitio web: <https://clame.org.mx/uploads/actas/alme28.pdf>
- Caballero, E. y Juárez J. (2016). Análisis y clasificación de errores en la adición de fracciones algebraicas con estudiantes que ingresan a la universidad. Números, revista de didáctica de las matemáticas, Volumen 91, pp. 33-56.
- Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. Descargado el 27 de Marzo de 2019, de UNIÓN, Revista iberoamericana de educación matemática. Sitio web: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2007/11/Union_011_007.pdf
- Del Puerto, Silvia, Minnaard, Claudia y Seminara, Silvia. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. Descargado el 29 de Marzo de 2019, de Revista iberoamericana de Edición.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, Fernando (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II. México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 173 – 201.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Original publicado en 1995)
- Fernández, D. y Ocoró, D. (2015). Caja de polinomios Web móvil. Tesis de Licenciatura. Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia.

- García, J. (2010). Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura. Tesis de maestría, Universidad de Granada, Granada, España.
- Heinze, A. (2005). Mistake-handling activities in the mathematics classroom. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 105-112. Melbourne: PME.
- Mejía, M. (2008). La factorización de polinomios en un ambiente CAS y lápiz/papel. Taller realizado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia. Descargado el 29 de Marzo de 2019, de Sitio web: <http://funes.uniandes.edu.co/947/1/16Taller.pdf>
- Méndez Olave, Teresita (2012). Marco Figural como Medio para Factorizar Polinomios Cuadráticos. Boletim de Educação Matemática, 26(44),1395-1416. [Fecha de Consulta 7 de Mayo de 2020]. ISSN: 0103-636X. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=2912/291226280013>
- Morales, L., Morales V. y Holguín S. (2016). Rendimiento escolar. Revista electrónica de Humanidades, ciencia y tecnología del Instituto Politécnico Nacional, ejemplar 15.
- Ospina, M. E. (2015). Guía didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes del CLEI IV del ITM. Trabajo final de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.
- Rubio, G. (2013). Proceso de estudio de la Factorización de polinomios mediante el uso de Algebloks desde la TAD. Tesis de Licenciatura, Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.
- Salazar, V., Jiménez S., Mora, L. (2013). Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización. I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe, Santo Domingo, República Dominicana. Sitio: i.cemacyc.org
- SEMS (2013). Programa de estudios del componente básico del marco curricular común de la educación media superior. Descargado 18 de Enero de 2018, Sitio web: http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/12615/5/images/BT_Algebra.pdf

Soto, Fernando, & Mosquera, Saulo, & Gómez, Claudia P. (2005). La caja de polinomios. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, XIII(1),83-97. [Fecha de Consulta 21 de Mayo de 2020]. ISSN: 0120-6788. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=468/46800108>

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa. Editorial Trillas, México. 2005, pp. 31.

Villarroel, J. (2014). Propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el proceso de factorización de polinomios, con la herramienta didáctica “caja de polinomios”, en estudiantes de grado octavo de la I.E María Cano del municipio de Medellín. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia