Aprendiendo a contar

Introducción

Todos los días nos vemos involucrados en una diversidad de situaciones en los que tenemos que encontrar, el número de maneras posibles en que se ha de arreglar un cierto conjunto de objetos. Por ejemplo, en las escuelas es frecuente realizar torneos deportivos, ya sea de fútbol, basquetbol, o volibol y para eso deben crear equipos entre los estudiantes para llevar a cabo los torneos. Suponiendo que en la escuela "*Vamos a contar*" se desea organizar un torneo en cada uno de los deportes mencionados. Pueden surgir diversas preguntas:

¿Cuántos equipos diferentes de futbol podemos formar si hay 150 estudiantes disponibles?
¿Cuántos equipos diferentes de basquetbol se pueden formar si sólo participa la mitad de los150 estudiantes disponibles?
¿Cuántos equipos de volibol se pueden formar si sólo la tercera parte de los estudiantes disponibles quiere participar?
Si se sabe que la mitad de los estudiantes disponibles son hombres y la otra mitad mujeres, Las mismas preguntas, pero ahora formando equipos por género.
¿Qué puede decirse si además no todos pueden jugar en cualquier posición?

Como se ve, algo que pareciera tan simple de responder, resulta que no es tan fácil de contestar, pues si intentamos resolver las preguntas, nos damos cuenta de que el conteo en cada caso no es inmediato. ¿Qué hacer entonces?

Ejemplos similares pueden enunciarse, por ejemplo, cuando se quiere formar un comité formado por 3 personas que pueden ser elegidas a partir de un cierto número de candidatos. Tal vez nos interese las distintas formas en que podemos escoger determinadas respuestas en concursos de televisión. También nos puede interesar saber todas las posibilidades de armar un paquete de venta de ciertos productos comerciales. O tal vez un grupo de investigadores médicos desea establecer la proporción de ciertos ingredientes, etc. Este tipo de preguntas, pueden resolverse usando ciertas técnicas de conteo. Por lo que el propósito de este trabajo es proporcionar una serie de técnicas de análisis combinatorio, las cuales nos permitirán resolver ejemplos como los mencionados con anterioridad, y problemas muchos más complejos, en los cuales de manera similar se requiera contar.

La base de este conjunto de técnicas de conteo, inician con dos principios: el Principio de Adición (o Suma) y el Principio de Multiplicación.

Principio de Adición

Antes de definir este principio veamos un ejemplo sencillo a manera de introducción.

Ejemplo 1. Supongamos que se tiene una colección Z de 50 esferas (e) de navidad, es decir, Z = {e1, e2, …, e50}, y que Pedro (P) selecciona 10 de ellas, y Juan (J) 8 de ellas. A partir de esto podemos estar interesados en diversas alternativas de conteo.

Si por n(Z) denotamos el número de elementos que pertenecen a Z y por n(P) y n(J) a los elementos del conjunto P y J respectivamente, podemos interesarnos en conocer que son $n(P \cup J)$, $n(P^c)$, $n(J^c)$, $n(P \cap J)$, n(P-J), etc.

Definición 1. (Principio de adición) Si A y B son conjuntos finitos y además $A \cap B = \emptyset$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Para tres conjuntos, no basta pedir que $A \cap B \cap C = \emptyset$, es necesario que también se cumpla que $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $C \cap B = \emptyset$. Generalizando esta idea a k conjuntos, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_k$ k conjuntos disjuntos, entonces

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_k)$$

Demostración. Se deja de ejercicio. #

En el caso de que los conjuntos no sean necesariamente disjuntos se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2. Para cualesquiera dos conjuntos A y B se tiene:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \qquad (1)$$

Demostración.
Por propiedades de teoría de conjuntos, sabemos que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ y $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$, con $A \cap B$, $A \cap B^c$, y $A^c \cap B$ son disjuntos entre sí, como se ve en la figura 1.

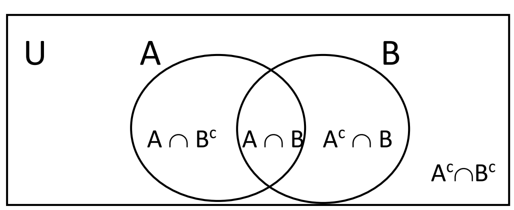


Figura 1.

De donde, $n(A) = n(A \cap B) + n(A \cap B^c)$ y $n(B) = n(A \cap B) + n(A^c \cap B)$, y

$$n(A) + n(B) = n(A \cap B) + n(A \cap B^c) + n(A \cap B) + n(A^c \cap B) \qquad (2)$$

Por otro lado, $n(A \cup B)$ es la suma de $n(A \cap B)$, $n(A \cap B^c)$ y $n(A^c \cap B)$, por lo que sustituyendo los últimos tres elementos del lado derecho de la ecuación (2), por $n(A \cup B)$, se tiene

$n(A) + n(B = n(A \cap B) + n(A \cup B)$, despejando $n(A \cup B)$ se obtiene el resultado. #

Ejemplo 2. Pedro tiene mucho frío. ¿De cuántas formas se puede proteger del frío si tiene 5 chamarras y 3 suéteres? Sabiendo que no se puede poner chamarras y suéteres a la vez.

Solución. Como no puede más que utilizar una chamarra o un suéter a la vez, por el principio de adición tiene 5 + 3 = 8 alternativas distintas con las que puede protegerse del frío.

Ejemplo 3. Pedro y Juan quieren salir a comer, pero para eso Pedro propone ir a 2 excelentes restaurantes de comida mexicana, mientras que Juan quisiera ir a uno de 3 magníficos restaurantes de comida italiana. ¿Cuántas alternativas de elección tendrán?

Solución.
En este caso como no pueden estar al mismo tiempo en más de un restaurante, tienen 2+3 = 5 opciones para ir a comer. Describir los posibles resultados.

Principio de multiplicación.

Antes de definir este principio veamos un ejemplo sencillo a manera de introducción.

Si en el ejemplo 3, suponemos que Pedro y Juan deciden no quedarse con el antojo de probar comida mexicana y comida italiana, por lo que ahora el problema es elegir un restaurante de comida mexicana y uno de comida italiana, por lo que tienen 2x3 = 6 opciones diferentes para ir a comer. Describir los posibles resultados.

Definición 2. (Principio de multiplicación) Supóngase que dos acciones o experimentos serán ejecutados; donde el primero puede efectuarse de ***m*** maneras diferentes, y si para cada resultado del experimento o acción 1, hay ***n*** maneras diferentes para el experimento o acción 2, entonces ambos experimentos o acciones pueden ejecutarse al mismo tiempo de ***mxn*** maneras diferentes.

Este principio puede comprobarse de la siguiente manera:

Si se tiene un conjunto A con m posibles resultados y un conjunto B con n posibles resultados, entonces, la totalidad de ocurrencias simultáneas de ambos conjuntos se muestra en la siguiente tabla

A \ B	1	2	…	n
1	(1,1)	(1,2)	…	(1,n)
2	(2,1)	(2,1)		(2,n)
⋮	⋮			⋮
m	(m,1)	(m,2)	…	(m,n)

Nota. Este principio puede generalizarse a cualquier número de experimentos que se tengan.

Teorema 3. Si se desean ejecutar k acciones al mismo tiempo, donde la primera acción se puede llevar a cabo de n_1 maneras, la segunda acción se puede llevar a cabo de n_2 maneras, y la k-ésima acción en n_k formas, entonces estas k acciones se pueden llevar a cabo de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ maneras distintas.

Demostración. Se deja como ejercicio. #

Ejemplo 4. Supongamos que una chica llamada Eva, desea salir a dar un paseo con un chico, por eso quiere vestir muy bien. Pero resulta que no puede decidirse como vestir, pues tiene 4 pantalones diferentes, 6 blusas diferentes, y para combinar su elección de ropa tiene 5 pares de calzado (tenis, botas, zapatillas urbanas, sandalias y zapatos de plataforma), además no puede salir si no lleva una bolsa o mochila de las cuales tiene 5 y 4 tipos respectivamente. ¿Cuántas maneras tiene para salir a la cita?

Solución.
n_1 = maneras de elegir un pantalón,
n_2 = maneras de elegir una blusa,
n_3 = maneras de elegir un par de calzado,
n_4 = maneras elegir una bolsa,
n_5 = maneras de elegir una mochila
¿Qué debe tomarse en cuenta para no equivocarnos en la respuesta final?

Definición 3. Si n es un entero no negativo, entonces n! (léase "factorial de n") se define como sigue:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \quad \text{para } n \geq 1$$
$$\text{y} \quad 0! = 1$$

Notas.
1. Por la propiedad conmutativa de la multiplicación se tiene

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

2. Por la propiedad asociativa y la propia definición de factorial se tiene

$$n! = n\cdot(n-1)!$$

Ejemplo 5.

a) $\dfrac{7!}{3!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$

b) $\dfrac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ (r factores)

c) $\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dfrac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$

Tarea de clase.

Simplificar las expresiones siguientes ($n \in \mathbb{N}$)

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ si $2 \leq n$

b) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$

c) $\dfrac{(n+2)!}{(n-2)!}$ si $2 \leq n$

d) $\dfrac{n!}{(n-2)!2!}$ si $2 \leq n$

e) $\dfrac{(n-1)!}{(n+2)!}$

Ejemplo 6.

a) Se desea formar un comité de dos integrantes, consistente de un hombre y una mujer, los cuales pueden ser elegidos de un grupo de 4 hombres y 6 mujeres. ¿Cuántos comités posibles pueden formarse?

Solución.

Considerando la elección del hombre como el resultado de la acción 1, y la elección de la mujer como el resultado de la acción 2, por el principio de multiplicación se tiene 4·6 = 24 comités posibles.

b) ¿Cuántas placas para automóvil con 7 lugares son posibles si los primeros 3 lugares son ocupados por letras y los 4 restantes por números?

Solución.

Mediante el siguiente diagrama puede tenerse una mejor idea del problema.

$$\underbrace{\square\square\square}_{letras}\ \underbrace{\square\square\square\square}_{números}$$

Considerando que el alfabeto sea de 26 letras (a, …, z; sin incluir la ñ), y 10 números (0, 1, …, 9) Por el principio de multiplicación se tiene $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175\ 760\ 000$ placas.

¿Y si no se permiten repeticiones ni de letras ni de números?

$R = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 78\ 624\ 000$ placas.

Considerando nuevamente el problema original. ¿Si no se permite el uso del número cero en el extremo izquierdo?

$R = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 158\ 184\ 000$ placas.

c) Dados los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5, encontrar cuántos números de 4 dígitos pueden ser formados con ellos si (a) ningún dígito puede ser repetido, (b) si las repeticiones de los dígitos son permitidas, (c) si el número debe ser impar, sin permitir la repetición de los dígitos.

Solución.

(a) Sin repetición de dígitos. Tenemos 4 lugares a ocuparse. El primer lugar puede ser ocupado con cualquiera de los 5 dígitos. Y como no se permite la repetición, el segundo lugar puede ser ocupado por cualquiera de los 4 dígitos restantes. En forma similar el tercer lugar es ocupado por cualquiera de los 3 dígitos restantes, y el cuarto lugar es ocupado por cualquiera de los dos restantes. Lo cual da

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \text{ números.}$$

(b) Repetición permitida. Si las repeticiones son permitidas, entonces todos los números pueden elegidos, tenemos

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625 \text{ números.}$$

(c) Impares sin repetición. Si el número debe ser impar, el dígito final debe ser 1, 3, o 5. Por lo tanto, el cuarto lugar será ocupado en tres formas, el tercer lugar será ocupado en 4 formas, el segundo lugar en 3 formas, y el primer lugar de 2 formas, por lo que se tendrían

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 72 \text{ números.}$$

Permutaciones y ordenaciones

Hay ocasiones en que deseamos seleccionar elementos de un cierto conjunto, pero nos interesa saber el orden en que deben seleccionarse. Por ejemplo, en un equipo de futbol el entrenador quiere definir su alineación inicial (11 jugadores) con la que empezará el partido a jugarse próximamente. Si se equivoca en formar la alineación correcta, probablemente tenga reclamos de la afición y de los dueños del equipo, entonces el debe tener una idea de cuáles serán todas sus posibles alternativas. También es claro que cuando vamos a formarnos para entrar a un circo, si no están numerados los asientos, no es igual que estemos al inicio de la fila que al último. Algo similar puede ser si en una fiesta de fin de año se forma una fila para elegir un regalo que el dueño les obsequia a sus empleados, no será igual si somos de los primeros que de los últimos, o cuando se va a la panadería por las tortas, si se llega al último quedan las tortas más maltratadas. En las carreras de autos de fórmula 1, la posición que se ocupe al inicio de la carrera es fundamental para tener altas posibilidades de ganar. Esta manera de seleccionar elementos será lo que a continuación definiremos.

Definición 4. Si se tiene una colección de n objetos, a todas las formas posibles de formar conjuntos de objetos de tamaño ***r* seleccionados del grupo de n objetos, se le conoce como una ordenación de tamaño *r***. Así, dos ordenaciones se dice que son distintas si no están formadas por los mismos elementos o si difieren en su posición. Analíticamente se tiene la siguiente fórmula:

$$O_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = (r+1)\bullet\cdots\bullet(n-1)\bullet n$$

Nota. Se sigue de la propia definición que r ≤ n.

Ejemplo 7.

1. Sea el conjunto {a,b,c,d} ¿Cuántas y cuáles son las ordenaciones de orden 2?
   Solución:
   $O_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$. Y son: ab ac ad ba bc bd ca cb cd da db dc.
   ¿Cuántas y cuáles son las ordenaciones de orden 3?
   $O_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$. Y son:
   abc abd acb acd adb adc
   bac bad bca bcd bda bdc
   cab cad cba cbd cda cdb
   dab dac dba dbc dca dcb.
2. ¿Cuántas filas de 6 hombres se pueden formar de un grupo de 10, si 3 de los hombres siempre deben estar juntos, aparezcan o no en la fila?

   Solución.
   De manera gráfica se tienen 6 lugares

   ___ ___ ___ ___ ___ ___
   1 2 3 4 5 6

   El problema es dividido en dos casos:

1º Cuando no aparecen los 3 hombres que siempre van juntos, sólo hay que seleccionar de a 6 de 7 hombres, es decir:

$$O_7^6 = \frac{7!}{(7-6)!} = 7! = 5040.$$

2º Cuando aparecen los 3 hombres que siempre están juntos: en este caso el problema es subdividido como se muestra en la figura 2:

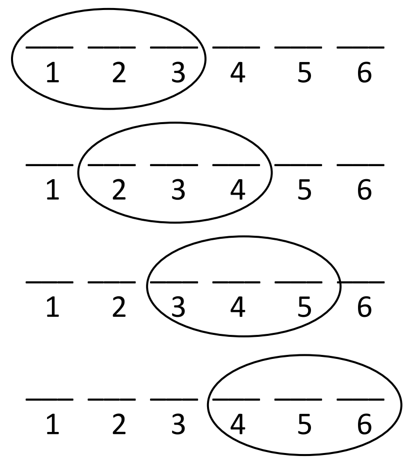


Figura 2.

(a) Como ya se tiene a los 3 que están condicionados, sólo resta escoger de los 7 restantes a 3 de ellos, con lo cual, se tiene:

$$O_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = 7!/4! = 210.$$

(b) Las maneras de colocar al grupo de los 3 hombres juntos, entre los tres restantes, de acuerdo con la figura 2, existen 4 maneras de colocar al grupo condicionado.

(c) Finalmente, aunque ellos estén juntos, eso no significa que no pueden ordenarse de manera interna, por lo cual se tendrán

$$O_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = 6.$$

Por lo tanto, el número de ordenaciones posibles cuando aparecen los 3 hombres juntos son:

$O_7^6 + O_7^3 \cdot 4 \cdot O_3^3 = 5040 + 5040 = 10080$ filas que pueden formarse.

Definición 5. Si en una ordenación sucede que n = r, ésta recibe el nombre de ***permutación***. Y analíticamente se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$P_n = O_n^n = n!$$

Ejemplo 8.

1. Permutar las 3 letras a, b, c.
   Solución. abc acb bac bca cab cba.
2. Un equipo de béisbol está formado por 9 jugadores. ¿Cuántos ordenes al bat diferentes entre sí son posible para un equipo de béisbol consistente de 9 hombres?
   Solución. $P_9 = 9! = 362880$ ordenes al bat.
3. Se tienen 10 libros que se quieren acomodar en un librero. Se tienen 4 de inglés, 3 de español, 2 de matemáticas y uno de física. ¿Cuántas maneras de acomodar los libros son posibles? ¿Y si se desea que todos los libros del mismo tema estén juntos?
   Solución. 10! y 4!·4!·3!·2!·1! maneras.

4. Se quiere identificar una palabra encriptada (contraseña) y solo se sabe que lleva las mismas letras de la palabra "BONITA". ¿Cuántas contraseñas son posibles?
   Solución. $P_6 = 6!$

Permutaciones y ordenaciones con repetición

Definición 6. Una ***ordenación con repetición*** es aquella en donde se permite la repetición de cada uno de sus objetos en los grupos de orden r de un grupo de n objetos. Analíticamente se calculan mediante la siguiente fórmula:

$$OR_n^r = n^r.$$

Nota. Aquí es claro que r puede ser mayor que n.

Ejemplo 9.

1. Las ordenaciones de orden 2 con repetición de las letras a, b, c, d, son:
   aa ab ac ad ba bb bc bd ca cb cc cd da db dc dd.
2. Se venden camisas de tres clases. Si dos personas compran una camisa cada una, ¿cuántas posibilidades hay?
   Solución.

Cada persona puede verse como un lugar a llenar. Por lo tanto, hay dos lugares. Para el primer lugar hay tres posibilidades, pues existen 3 clases de camisas, mientras que para el segundo lugar, sucede algo similar, pues ambas personas pueden tener el mismo gusto. De aquí que hay

$3 \cdot 3 = 9$ posibilidades.

Definición 7. Por una ***permutación con repetición***, se entenderá que es una ordenación con repetición de orden n. Y analíticamente se calcula mediante la fórmula siguiente:

$$PR_n = OR_n^n = n^n.$$

Ejemplo 10.

1. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5?
   Solución. Se pueden formar $PR_5 = 5^5 = 3125$ números.
2. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4?
   Solución. $PR_5 - \frac{1}{5}PR_5 = \frac{4}{5}PR_5 = \frac{4}{5}(3125).$

Permutación con grupos de objetos iguales

Definición 8. Si tenemos un grupo de n objetos, donde existe un grupo de n_1 objetos iguales y otro grupo de n_2 objetos iguales. Al número de permutaciones distintas del grupo de objetos, se le conoce como ***permutación con grupos de objetos iguales***. Y analíticamente se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$P_n^{n_1,n_2} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!}$$

Generalizando esta definición, tenemos:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

donde $n_1, n_2, ..., n_r$ son grupos de objetos iguales.

Ejemplo 11.

1. Si se tienen las letras a, b, c, ¿cuáles serían todas las permutaciones distintas, si a = b?
   Solución. Permutando las 3 letras se tiene

a b c	b a c	c a b
a c b	b c a	c b a

   Si sucede que a = b, se tendría

a a c	a a c	c a a
a c a	a c a	c a a

   con lo cual sólo habría en realidad tres permutaciones distintas

a a c	a c a	c a a

2. Calcular, ¿cuántas permutaciones se pueden formar con las letras de las palabras:

(a) MARINELITA
(b) CANELITAS
(c) INGENIERIA
(d) PROBABILIDAD
(e) ESTADISTICAS

Solución.

(a) MARINELITA

n = 10, n_1 = 2, n_2 = 2 => $P_{10}^{2,2} = \frac{10!}{2!\,2!} = 907200$

(b) CANELITAS

n = 9, n_1 = 2, => $P_9^{2} = \frac{9!}{2!} = 181440$

(c) INGENIERIA

n = 10, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 2 => $P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!\,2!\,2!} = 151200$

(d) PROBABILIDAD

n = 12, n_1 = 2, n_2 = 2 n_3 = 2, n_4 = 2 => $P_{12}^{2,2,2,2} = \frac{12!}{2!\,2!\,2!\,2!} = 29937600$

(f) ESTADISTICAS

$n = 12$, $n_1 = 3$, $n_2 = 2$ $n_3 = 2$, $n_4 = 2$ => $P_{12}^{3,2,2,2} = \dfrac{12!}{3!\,2!\,2!\,2!} = 9979200$

3. ¿En cuántas formas se pueden 3 bolas blancas, 4 rojas y 4 negras ser arregladas en una fila si las bolas que son de un mismo color son indistinguibles entre sí?
   Solución.
   Hay $\dfrac{11!}{3!\,4!\,4!} = 1150$ arreglos posibles.

Permutaciones circulares

Hasta este momento hemos visto que cuando por ejemplo se tienen las tres letras a, b, c, la permutación

a b c es diferente de c a b

Es decir, si pasamos la última letra (la c) a que ocupe la primera posición, y recorremos las otras dos hacia la derecha, las dos permutaciones son diferentes.

Supongamos ahora que ordenamos estas mismas letras en un círculo (véase la figura 3.a); e inmediatamente movemos de posición las letras tal y como se ve en la figura 3.b; en ambas figuras se observa que después de a sigue b y después de b sigue c. Con lo cual se intuye que en un círculo ambas permutaciones significan la misma permutación.

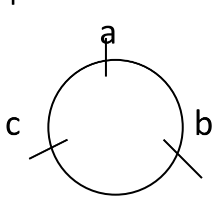


Figura 3.a

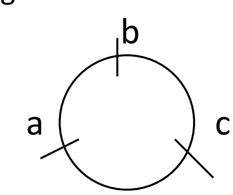


Figura 3.b

En general si consideramos a una permutación de n objetos, obtendríamos que todas estas n permutaciones

$$
\begin{array}{lllll}
1, & 2, & \ldots, & (n-1), & n \\
n, & 1, & \ldots, & (n-2), & (n-1) \\
(n-1), & n, & \ldots, & (n-3), & (n-2) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
2, & 3, & \ldots, & n, & 1
\end{array}
$$

generan a una ***permutación circular*** y viceversa, una permutación circular genera a n permutaciones. Analíticamente se calculan mediante la siguiente relación:

$$n! = P_n = n \cdot PC_n$$

de donde obtenemos la siguiente definición.

Definición 9. En una permutación circular las distintas maneras de ordenar n objetos es:

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Nota. Cuando una permutación circular pueda verse por arriba o por abajo, por delante o por atrás, o después de un giro de 180º, la fórmula se vuelve:

$$PC_n = \frac{(n-1)!}{2}$$

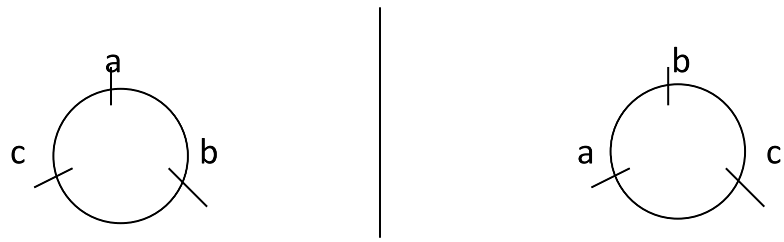


Figura 4.

Ejemplo 12.

Calcular el número de maneras diferentes en que 5 personas puedan colocarse:

(a) En una fila.
(b) Alrededor de una mesa.
(c) Alrededor de una mesa si una persona debe ocupar un lugar determinado.
(d) Alrededor de una mesa si dos personas deben estar siempre juntas.
(e) En una rueda de la fortuna.

Solución.

(a) $P_5 = 5! = 120.$

(b) $PC_5 = 4! = 24.$ (siempre que no se permita al observador ver por debajo de la mesa).

(c) $PC_5 = 4! = 24.$ Recordar que no interesa la posición absoluta de los objetos, sino solo la posición relativa con respecto a ellos mismos, así el problema es resuelto igual que en el inciso anterior, salvo por el hecho de que se les pide a las personas colocadas en la mesa, girar alrededor de la mesa, sin perder sus posiciones relativas, hasta que quede en el lugar determinado la persona condicionada.

(d) Eligiendo como una a las dos personas que siempre deben estar juntas, se tienen PC_4 permutaciones, además de P_2 maneras de permutar a las dos personas que van juntas, así se tiene

$$PC_4 \cdot P_2 = 3! \cdot 2! = 12.$$

(e) Como en la rueda de la fortuna puede contarse de los dos lados, se tiene

$$PC_5 = 4!/2 = 12.$$

Combinaciones

Definición 10. Por una ***combinación de n objetos de orden r***, entenderemos la forma de elegir r objetos de un grupo de n objetos, sin importarnos el orden en que se hayan elegido. Así pues, dos combinaciones serán distintas entre sí, si difieren en al menos un elemento. Analíticamente, se calculan de la siguiente manera:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Notas.
1. Es claro que r es menor que n.
2. No es permitida la repetición.
3. No nos interesa el orden, sólo la clase representativa.

Ejemplo 13.
1. Un comité de 3 será formado de un grupo de 15 personas. ¿Cuántos comités diferentes son posibles?
   Solución.
   Aquí r = 3, n = 15, luego entonces hay
   $$C_{15}^3 = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 1} = 455 \text{ comités posibles.}$$
2. De un total de 5 matemáticos y 7 psicólogos, se forma un comité de dos matemáticos y 3 psicólogos. ¿De cuántas formas se pueden formar si:

(a) pueden pertenecer cualquier matemático o psicólogo?
(b) un psicólogo determinado debe pertenecer al comité?
(c) dos matemáticos determinados no pueden estar en el comité (yo y algún otro)?

Solución.

(a) De los matemáticos debemos escoger 2 de 5, es decir, $C_5^2 = 10$ maneras. De los psicólogos debemos escoger 3 de 7, es decir, $C_7^3 = 35$ maneras. Por lo tanto, por el PBC hay 35×10 = 350 comités.
(b) Como un psicólogo ya pertenece al comité por un obvio dedazo, quedan 4 lugares para dos matemáticos y 2 psicólogos. Así pues, se escogen 2 matemáticos de 5, es decir, $C_5^2 = 10$ maneras. Finalmente se escogen 2 psicólogos de 6, es decir, $C_6^2 = 15$ maneras. Y por el PBC se tienen 10×15 = 150 comités.
(c) Quitando a los 2 matemáticos, sólo pueden escogerse 2 de los 3 que quedan, es decir, $C_3^2 = 3$ maneras. De los 7 psicólogos se escogen 3, es decir, $C_7^3 = 35$ maneras. Y por el PBC se tiene 3×35 = 105 comités.

3. De un grupo de 10 personas debe elegirse un comité formado por 5. Calcular el número de comités diferentes que se pueden elegir si:

(a) Las 10 personas son igualmente elegibles.
(b) Dos de las personas elegibles no pueden estar juntas en el comité.
(c) Dos de las personas elegibles deben estar siempre juntas dentro o fuera del comité.
(d) En el comité se decide tener un presidente.

Solución.

(a) Como todas las personas son elegibles se tiene:

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = 252.$$

(b) Si suponemos que aparecen juntas, el problema se reduce a elegir a los tres restantes, así se tiene:

$$C_{8}^{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56.$$

entonces 252-56 = 196 comités diferentes en los que las 2 personas no aparecen.

(c) Por (b) ya se sabe que cuando aparecen juntas son 56 comités, así cuando no aparecen se eligen 5 de 8, por lo que

$$C_{8}^{5} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56 \text{ comités.}$$

$\therefore$ hay 56 + 56 = 112 comités posibles.

(d) Como hay 10 maneras de elegir al presidente, sólo resta elegir 4 de 9, por lo tanto,

$$C_{9}^{4} = \frac{9!}{4!\,5!} = 126$$

$\therefore$ hay 10 $\times$ 126 = 1260 maneras.

Teorema Binomial

Una de las herramientas muy utilizadas al trabajar en probabilidad es el uso del teorema binomial, motivo por el cual es incluido en esta sección.

Teorema 3. $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r \; a^r \, b^{n-r}$.

Demostración se omite. #

Nota. Si a = b = 1, el teorema binomial será:

$$2^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$$

$\therefore \; C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n - 1.$

Ejemplo 14.
¿De cuántas maneras diferentes se pueden seleccionar una o más personas de un grupo de 20?
Solución.

$$C_{20}^{1} + \cdots + C_{20}^{20} = 2^{20} - 1 = 1{,}048{,}575 \text{ maneras diferentes.}$$

Combinaciones con repetición

Definición 11. Cuando es permitida la repetición en una combinación, se dice que es una ***combinación con repetición***. Y analíticamente se calcula con la siguiente fórmula:

$$CR_{n}^{r} = C_{n+r-1}^{r}$$

Nota. Nuevamente r puede ser mayor que n.

Ejemplo 15.
1. Formar las combinaciones con repetición de orden 2 de las letras a, b, c.
   Solución. aa ab ac bb bc cc.
2. Supongamos que va a formarse un comité de 5 estudiantes. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar con respecto a su composición de hombres y mujeres?
   Solución.

   n = 2, r = 5 => $CR_{2}^{5} = C_{6}^{5} = \dfrac{6!}{5!\,4!} = 6.$

   y son:
   H H H H H
   H H H H M
   H H H M M
   H H M M M
   H M M M M
   M M M M M

Coeficiente y Teorema Multinomial

Definición 12. Por definición $\binom{n}{r}$ para r ≤ n es:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

y decimos que $\binom{n}{r}$ representa el número de combinaciones posibles de n objetos tomados r a un tiempo.

Notas.

1. $\binom{n}{r}$ es llamado ***número combinatorio***.

2. Por convención 0! Se define igual a 1. Entonces $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Los números combinatorios cumplen las siguientes propiedades:

1. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
2. $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$ ó $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$, $1 \leq r \leq n$.
3. El teorema binomial, puede enunciarse ahora como:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r} .$$

Ejemplo 16.

1. Expandir $(x+y)^3$.

   Solución.

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^0 y^3 + \binom{3}{1} x^1 y^2 + \binom{3}{2} x^2 y^1 + \binom{3}{3} x^3 y^0$$
$$= y^3 + 3xy^2 + 3x^2 y + x^3 .$$

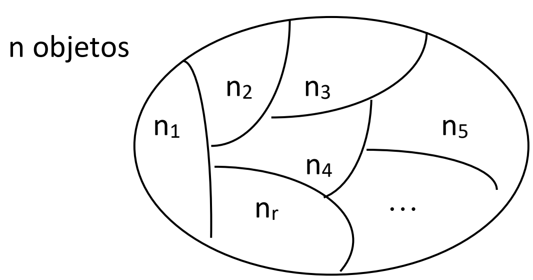
2. ¿Cuántos subconjuntos hay de un conjunto consistente de n elementos?

   Solución.

   Como hay $\binom{n}{r}$ subconjuntos de tamaño r, la respuesta deseada es

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = (1+1)^n = 2^n .$$

Consideremos el siguiente problema. Supongamos que a un grupo de n objetos lo queremos dividir en r grupos de tamaño $n_1, n_2, ..., n_r$ respectivamente, con $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$. ¿Cuántas divisiones son posibles?



Para responder, notemos que hay $\binom{n}{n_1}$ elecciones posibles para el primer grupo; por cada elección del primer grupo hay $\binom{n-n_1}{n_2}$ elecciones posibles para el segundo grupo; por cada elección de los primeros dos grupos hay $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ elecciones posibles para el tercer grupo; y así sucesivamente. Por lo que por el Principio de la Multiplicación, tenemos

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$$

$$= \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{0!\,n_r!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} \text{ número de divisiones posibles.}$$

Definición 13. El **coeficiente multinomial** se define por

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

donde $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$. Con lo que este coeficiente representa el número de posibles divisiones de n objetos distintos en r grupos distintos de tamaño n_1, n_2, ..., n_r respectivamente.

Ejemplo 17.

En una estación de policía se tienen a 10 policías, 5 de ellos patrullan las calles, 2 atienden la oficina y los 3 restantes están en calidad de reserva. ¿Cuántas divisiones de estos tres grupos son posibles?

Solución.

$$\binom{10}{5,3,2} = \frac{10!}{5!3!2!} = 2520 \text{ divisiones posibles.}$$

Teorema 4. (Multinomial)

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_r)\\ n_1+\cdots+n_r=n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} .$$

Nota. La suma está evaluada en los enteros no negativos (n_1, n_2, ..., n_r) tales que n_1+ n_2+ ... + n_r = n.

Ejemplo 18.

1. Calcular $(x_1 + x_2 + x_3)^2$.

   Solución.

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = \binom{2}{2,0,0} x_1^2 x_2^0 x_3^0 + \binom{2}{0,2,0} x_1^0 x_2^2 x_3^0 + \binom{2}{0,0,2} x_1^0 x_2^0 x_3^2$$
$$+ \binom{2}{1,1,0} x_1^1 x_2^1 x_3^0 + \binom{2}{1,0,1} x_1^1 x_2^0 x_3^1 + \binom{2}{0,1,1} x_1^0 x_2^1 x_3^1$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 .$$

2. El juego de bridge es jugado por 4 jugadores, cada uno de los cuáles recibe 13 naipes. ¿Cuántas manos de bridge son posibles?

   Solución.

   Nuestro problema consiste en elegir 4 grupos de 13. Utilizando el coeficiente multinomial se tiene:

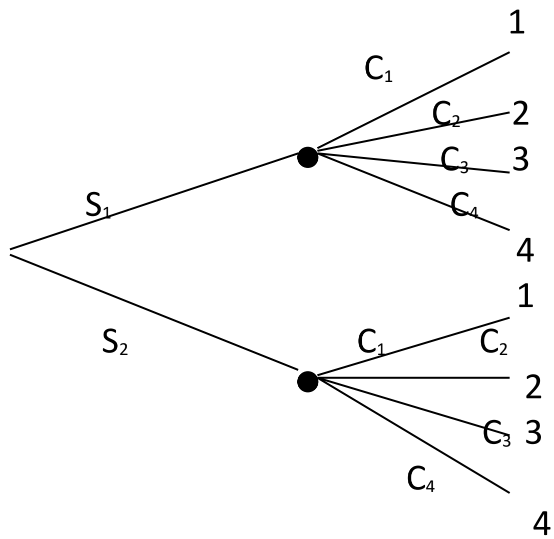
$$\binom{52}{13,13,13,13} = \frac{52!}{13!13!13!13!} = \frac{52!}{(13!)^4}$$ divisiones posibles.

Diagramas de árbol

Una última opción de conteo es el que se lleva a cabo utilizando el concepto de diagrama de árbol. Este diagrama, llamado ***diagrama de árbol*** debido a su apariencia, se emplea frecuentemente en conexión con el Principio Básico de Conteo.

Ejemplo 19.

Si un hombre tiene 2 camisas y 4 corbatas entonces tiene 2·4 = 8 maneras de escoger una camisa y luego una corbata. Si las camisas se representan por S_1, S_2 y las corbatas por C_1, C_2, C_3, C_4, las diferentes maneras de escoger una camisa y luego una corbata se indican en el siguiente diagrama de árbol.



Serie de Ejercicios.

En los ejercicios del 1 al 9 usar solamente los principios de adición o multiplicación.

1. ¿Cuántos números de 5 dígitos pueden ser formados con los enteros 1, 2, 4, 6, 7, 8, si los enteros no pueden ser usados más de una vez? ¿Cuántos de esos números son pares? ¿Cuántos impares?
2. ¿En cuántas formas pueden tres cartas ser enviadas por correo en 6 buzones, si cada carta debe ser enviada en un buzón diferente? Si las cartas no son necesariamente enviadas por correo en buzones diferentes, ¿cuántas formas hay de enviarlas al correo?
3. Un tren de pasajeros tiene 9 vagones. ¿En cuántas formas pueden 4 personas ser asignadas a los vagones si ellas deben viajar en vagones diferentes?
4. Doce muchachas son sometidas a prueba para formar el equipo de basquetbol de Psicología. Dos sólo pueden jugar en el centro, cuatro sólo como defensas derechas o izquierdas, y el resto sólo puede jugar como delanteras derechas o izquierdas; ¿en cuántas formas podría el entrenador asignar un equipo?
5. ¿En cuántas formas pueden 5 muchachos y 5 muchachas ser sentados alternadamente en una fila de 10 sillas, numeradas del 1 al 10, si un muchacho siempre ocupará la silla número uno?
6. ¿En cuántas formas puede una selección de al menos un libro ser hecha de 8 libros diferentes?
7. Una persona está por comprar un auto. Puede escoger tres tipos de motores, siete modelos y catorce colores. ¿Cuántos autos distintos tiene para escoger la persona?
8. (a) Si un hombre tiene r hijos y cada uno de estos tiene r hijos, etc. ¿Cuántos bisnietos habría? (b) Supongamos que el hombre, su mujer y todos sus descendientes continúan vivos y todos son casados excepto los bisnietos. ¿Cuántos platos deben tenerse para la cena de Navidad, si todos traen a sus propias familias? (c) ¿Qué tan grande es la familia si r = 6? (d) ¿Si r = 2?

9. ¿Cuántos números de tres cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar, la segunda sea par y la tercera sea diferente de las dos primeras?
10. Si 4 americanos, 3 franceses, y 3 ingleses son sentados en una fila, ¿cuántos arreglos son posibles cuando gente de la misma nacionalidad deben sentarse juntas?
11. (a) ¿En cuántas formas pueden 3 muchachos y 3 muchachas sentarse en una fila? (b) ¿En cuántas formas pueden 3 muchachos y 3 muchachas sentarse en una fila si los muchachos y las muchachas deben sentarse cada grupo juntos? (c) ¿En cuántas formas, si sólo los muchachos deben sentarse juntos? (d) ¿En cuántas formas, si a dos gentes del mismo sexo no se les permite sentarse juntas?
12. ¿Cuántos arreglos de letras diferentes pueden hacerse con las letras (i) FLUKE, (b) MISSISSIPPI, (c) COMBINACIONES, (d) ARRANGE?
13. Una niña tiene 12 cuadernos de los cuáles 6 son negros, 4 rojos, 1 es blanco, y 1 es azul. Si la niña pone los cuadernos en una línea, ¿cuántos arreglos son posibles?
14. ¿Cuántas manos de póker hay?
15. Un comité de 7, consistente de 2 priístas, 2 panistas y 3 perredistas, es elegido de un grupo de 5 priístas, 6 panistas, y 4 perredistas. ¿Cuántos comités son posibles?
16. Al baile de Señorita Amistad asisten n muchachos y n muchachas. Si todos están bailando (cosa que en la realidad no sucede). ¿Cuántas parejas diferentes se pueden formar?
17. En cierta población, mediante el pago de una cuota extra, es posible conseguir una placa de automóvil "especial" con 4 letras o menos (sin números). Si "I", "O" y "X" no están permitidas y si se requiere que por lo menos una letra figure en la placa, ¿cuántas placas diferentes especiales son posibles?
18. El horario de los programas de televisión de una ciudad, en los canales 6, 7 y 9, es el siguiente:

Canal	Horario
6	8:00, 8:30, 9:30, 10:00
7	8:00, 9:00, 9:30, 10:00
8	8:00, 8:30, 9:00, 9:30, 10:10

Si una persona decide ver la televisión de 8:00 a 10:00, ¿cuántas selecciones diferentes puede hacer, si se supone que cuando empieza a ver un programa lo sigue viendo hasta que termina y que, además, no puede empezar a ver un programa cuando éste ya se inició?

19. Un bibliotecario tiene espacio para colocar 17 libros en un entrepaño, y tiene 12 libros de los cuales debe escoger los 7. ¿De cuántas maneras puede colocar los 7 libros en el entrepaño?
20. ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar con las letras de "BONITA"?
21. ¿Es cierto que para $n > 1$, $n! = n\,(n-1)!$? Si esto fuera cierto también para $n = 1$, ¿cómo se definiría $0!$?
22. ¿Puede ayudar el procedimiento usado en el ejercicio 20 para definir (-1)? ¿Por qué sí o por qué no?
23. Si hay 5 caminos para ir del pueblo A al pueblo B, y 3 del pueblo B al pueblo C, ¿cuántos itinerarios diferentes se pueden tomar para ir del pueblo A al C, pasando por el pueblo B? ¿Cuántos para ir del pueblo C al A pasando por el pueblo B? ¿Cuántos son

los posibles itinerarios para hacer un viaje del pueblo A al C, pasando por B y regresando a A, pasando por B?

24. María Elena tiene 5 blusas y 6 faldas. Suponiendo que ella acepta cualquier combinación de estas prendas, ¿cuántas combinaciones diferentes de falda y blusa puede formar?
25. ¿Cuántos números de 4 cifras pueden formarse con los 10 dígitos 0, 1, 2, ..., 9?, si: (a) Los números pueden repetirse, (b) Los números no pueden repetirse, (c) El último número ha de ser cero y los demás no pueden repetirse 2 veces.
26. María Elena tiene 5 monedas de diferentes valores. ¿Cuántas sumas diferentes de dinero puede formar con las 5 monedas?
27. María Elena debe contestar 7 de 10 preguntas en un examen. ¿Cuántas elecciones tiene? ¿Cuántas si debe contestar al menos 3 de las 5 primeras preguntas?
28. ¿De cuántas maneras diferentes pueden caer dos dados?
29. ¿De cuántas formas pueden sentarse 7 personas alrededor de una mesa?, si: (a) pueden sentarse de cualquier forma? (b) si 2 personas determinadas no deben estar una al lado de la otra?
30. Dado Z = {a,b,c,d,e,f}. ¿Cuántos subconjuntos tiene Z? ¿Cuántos de estos subconjuntos no tienen elementos? ¿Cuántos tienen un elemento? ¿Cuántos tienen 2, 3, 4, 5 y 6 elementos? Comprobar por adición, que la respuesta a la primera pregunta concuerde con las demás.
31. De un grupo de 8 personas se va a elegir un comité de 4 personas. ¿De cuántas maneras se puede formar? Si 4 de ellos son hombres y 4 son mujeres, ¿en cuántas formas se puede integrar el comité de modo que no se incluyan mujeres? ¿En cuántas formas si se incluyen 1, 2, 3 y 4 mujeres?
32. Se va a conformar un comité de 3 miembros por un representante de los trabajadores, uno de la administración y uno del gobierno. Si hay 3 candidatos de los trabajadores, 2 de la administración y 4 del gobierno, determinar cuántos comités diferentes pueden conformarse, empleando (a) El Principio Básico del Conteo y (b) un diagrama de árbol.
33. Se lanza una moneda al aire tres veces. Utilizar un diagrama de árbol para determinar las diferentes posibilidades que pueden suceder.
34. Se extraen tres cartas aleatoriamente (sin remplazamiento) de una baraja de 52 cartas. Utilizar un diagrama de árbol para determinar el número de maneras en las que se puede extraer (a) un diamante y un trébol y un corazón en secuencia, (b) dos corazones y luego un trébol o una pica.
35. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 3 monedas diferentes en 2 posiciones diferentes?
36. Para cada uno de los siguientes ejemplos, decidir si están implicadas ordenaciones, permutaciones o combinaciones y después en encontrar el número de ellas.
    (a) El número de comités de 2 personas que se pueden formar con un grupo de 12.
    (b) El número de alineaciones posibles para un equipo de béisbol que se pueden formar con 12 personas (un equipo de conforma por 9 jugadores).
    (c) El número de palabras de cinco letras que se pueden formar con 12 letras diferentes.

(d) El número de equipos de basquetbol (5 jugadores) que se pueden formar con 10 personas.
(e) El número de tríadas ordenadas que se pueden formar con 10 números diferentes.
(f) El número de tríadas ordenadas que se pueden formar con los números 1, 1, 1, 3, 3, 5, 5, 5, 5 y 4.

37. El taxi de Zacarias tiene 2 asientos en la parte delantera y 3 en la parte trasera. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 6 pasajeros, si Zacarias ocupa el lugar del chofer y su novia se sienta junto a él?
38. Expanda $(3x^2+y)^5$. Expanda $(x_1+2x_2+3x_3)^4$.
39. Si 12 personas son divididas en 3 comités de tamaños respectivos 3, 4 y 5, ¿cuántas divisiones son posibles?
40. Si 8 pizarrones idénticos son repartidos entre 4 colegios, ¿cuántas reparticiones son posibles? ¿Cuántas, si cada escuela debe recibir al menos un pizarrón?
41. Si 8 nuevos maestros son repartidos entre 4 colegios, ¿cuántas reparticiones son posibles? ¿Cuántas si cada colegio debe recibir 2 maestros?
42. Hallar el valor de $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4$.
43. Hallar el coeficiente del noveno término de $(x+3y)^{15}$.
44. ¿Cuántos números diferentes de dos cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 si (a) no se permite la repetición? (b) si se permite la repetición?
45. Si $24O_7^r=10O_9^r$, hallar el valor de r.
46. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 24 parejas en una rueda de la fortuna que tiene 24 canastillas?
47. ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse usando las letras de la palabra ***institution***, tomadas todas a la vez? ¿Cuántas empiezan con t y finalizan con s?
48. Encontrar el número de formas en los cuáles 6 signos de + y 4 de – pueden ser arreglados en una fila.
49. Cuatro parejas van juntas al teatro y compraron boletos para 8 asientos de la misma fila. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar las 4 parejas sin que alguna quede separada?
50. ¿Cuál es el octavo término del desarrollo de $(c+d)^9$?
51. Calcular $(10.75)^5$, aproximado hasta centésimos.
52. Calcular $(0.72)^{10}$, aproximado hasta milésimos.
53. ¿Cuántas diferentes sumas de dinero se pueden formar teniendo: una moneda de un centavo, una de 10, una de 25 y una de 100 centavos?
54. El alfabeto inglés tiene 26 letras de las cuales 5 son vocales.
    (i) ¿Cuántas palabras de 5 letras, con 3 consonantes diferentes y 2 vocales diferentes, se pueden formar?
    (ii) ¿Cuántas de éstas contienen la letra b?
    (iii) ¿Cuántas contienen la b y la c?
    (iv) ¿Cuántas empiezan por b y terminan por c?
    (v) ¿Cuántas empiezan por b y contienen a c?
    (vi) ¿Cuántas contienen las letras a y b?

(vii) ¿Cuántas empiezan por a y contienen b?
(viii) ¿Cuántas empiezan por b y contienen a?
(ix) ¿Cuántas empiezan con a y termina por b?
(x) ¿Cuántas contienen las letras a, b y c?

55. Se forma una larga lista de dígitos escribiendo los enteros del 1 al 2011 uno a continuación del otro:
12345678910111213...200920102011.
¿Cuántas veces aparece la secuencia 12 en esa lista?