MODELOS DE PROBABILIDAD:

CONTINUOS

Dr. José Dionicio Zacarias Flores

FUNCIÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS: CASO CONTINUO

La **función generatriz de momentos *M*(*t*)** de la variable aleatoria X se define para todos los valores reales de t como:

$$M(t) = E(e^{tX}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)\, dx$$

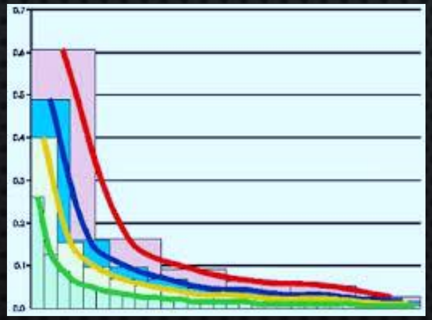
si X es continua con función de densidad f(x)

DEFINICIÓN

Sea X una variable aleatoria. Se dice que X es una **variable aleatoria continua**, si existe una función no negativa f, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, teniendo la propiedad de que para cualquier conjunto B de números reales

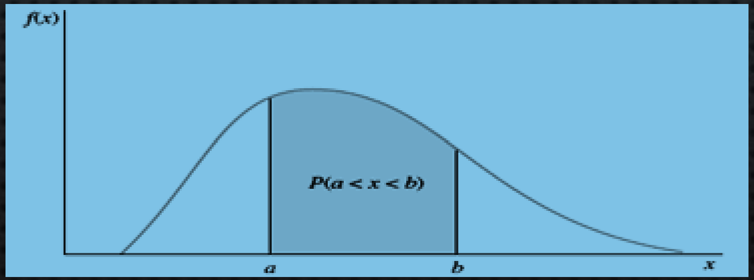
$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)\, dx$$

A la función **f** se le llama **función de densidad de probabilidad** de la variable aleatoria.



OBSERVACIONES

- P{X ∈ (-∞,∞) } = $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
- Si B =[a,b], P{a ≤ x ≤ b} = $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$
- Si a = b, P{X = a } = $\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$, es decir, en el caso continuo, la probabilidad puntual es cero.
- La función de distribución acumulada para una variable aleatoria continua es F(a) = P{X ≤ a} = P{X < a} = $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$



VALOR ESPERADO Y VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

El valor esperado de una variable aleatoria continua X, con función de densidad f, se define como

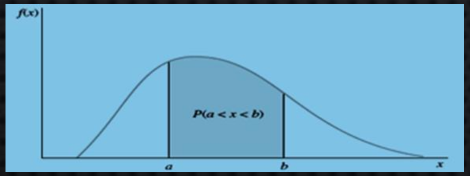
$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Para cualquier función g definida sobre los reales

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx$$

Si a y b con constantes, $E[aX + b] = a\,E[X] + b$

$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$, $Var(aX + b) = a^2\,Var(X)$



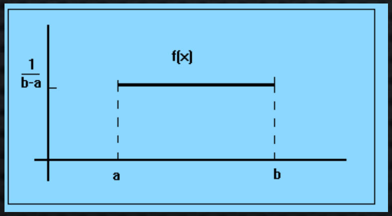
DISTRIBUCIÓN UNIFORME

Una variable aleatoria continua X se dice que es distribuida de manera uniforme sobre el intervalo **(α,β)** si su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & si \;\; \alpha < x < \beta \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

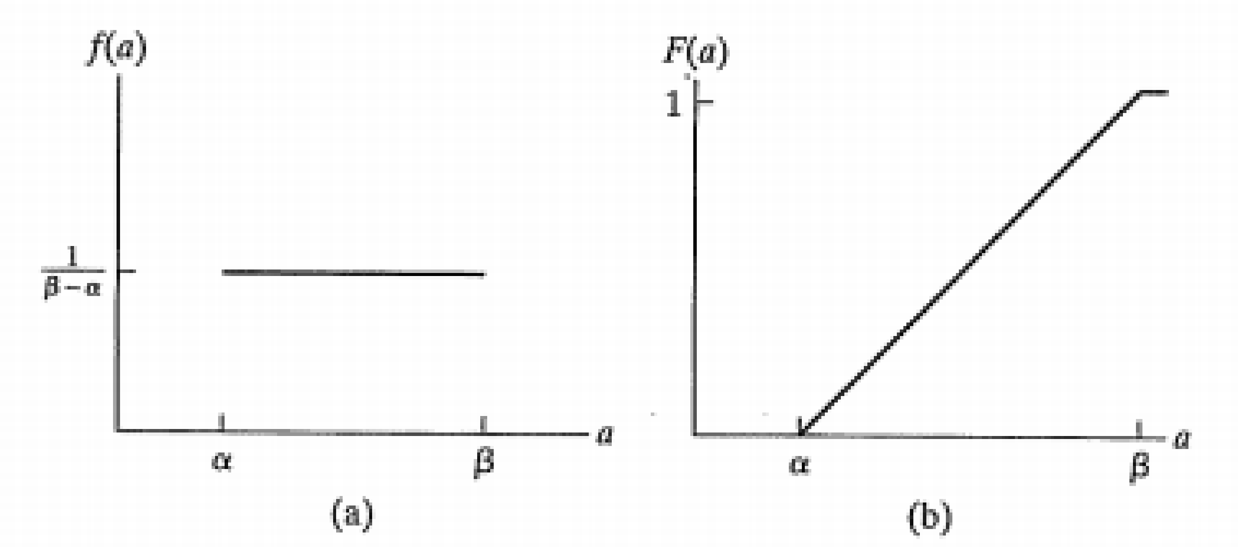
Su f.d.a. se define como

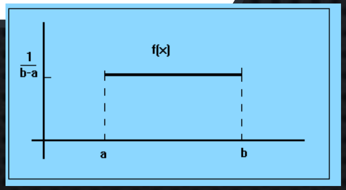
$$F(a) = P\{X \leq a\} = \begin{cases} 0 & a \leq \alpha \\ \dfrac{a - \alpha}{\beta - \alpha} & \alpha < a < \beta \\ 1 & a \geq \beta \end{cases}$$



DISTRIBUCIÓN UNIFORME

- LAS GRÁFICAS DE LA F.D.P. Y DE LA F.D.A DE UNA UNIFORME SON:





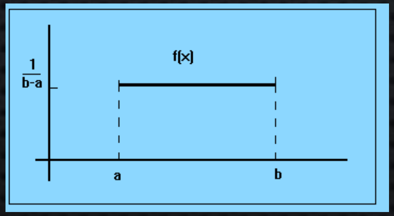
VALOR ESPERADO Y VARIANZA DE UNA DISTRIBUCIÓN UNIFORME

El valor esperado de una distribución uniforme es:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\beta - \alpha}\, dx = \frac{\beta + \alpha}{2}$$

La varianza de una distribución uniforme es:

$$Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$



DISTRIBUCIÓN NORMAL

Una variable aleatoria continua X se dice que es distribuida de manera normal con parámetros **(μ,σ^2)** si su función de densidad de probabilidad es:

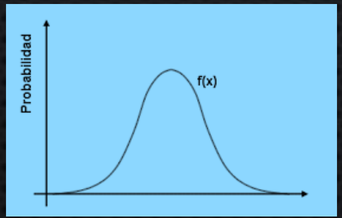
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

La f.d.a. de una v.a. normal estándar **(0,1)**, se define como Φ(a) = P{X < a}

$$\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-y^2/2}\, dy$$

Para cuando los x son negativos,

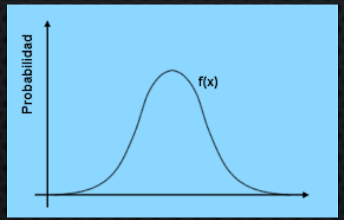
$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad -\infty < x < \infty$$



DISTRIBUCIÓN NORMAL: NORMALIZANDO UNA VARIABLE ALEATORIA

Si tenemos una variable aleatoria normal X con parámetros (μ,σ^2), para poder calcular la probabilidad de X sobre cualquier intervalo, se efectúa lo que se conoce como normalizar al caso estándar (0,1), debemos crear una nueva v.a. Z definida como **$Z = (X-\mu)/\sigma$**, así su función de distribución de probabilidad es:

$$F_x(a) = P\{X \leq a\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right\} = P\left\{Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

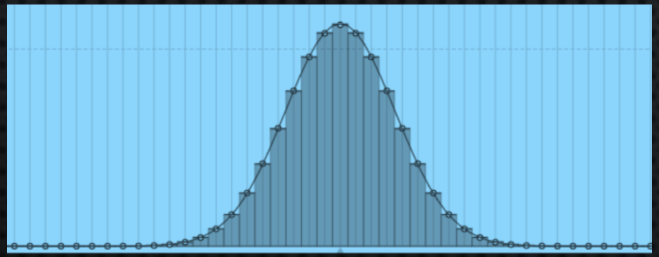


APROXIMACIÓN DE UNA BINOMIAL MEDIANTE LA NORMAL

El siguiente resultado conocido como el Teorema Límite de Moivre-Laplace, una distribución binomial de parámetros (n,p), cuando la n es grande, puede aproximarse por medio de la distribución normal.

Si S_n denota al número de éxitos que se dan con n repeticiones independientes, donde cada éxito tiene probabilidad p de ocurrir, entonces para cualesquiera a < b

$$P\left\{a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right\} \to \Phi(b) - \Phi(a) \quad \text{cuando } n \to \infty$$



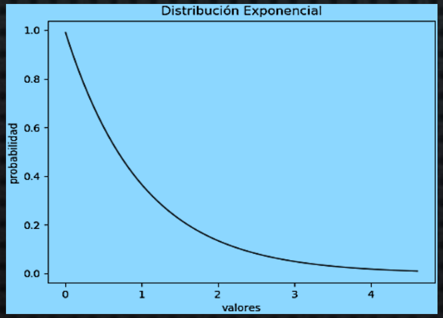
DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Una variable aleatoria cuya f.d.p. es dada para algún **$\lambda > 0$** por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ \ x < 0 \end{cases}$$

La f.d.a use define como:

$F(a) = P\{X \leq a\} = 1 - e^{-\lambda a}\ \ si\ a\ \geq 0$

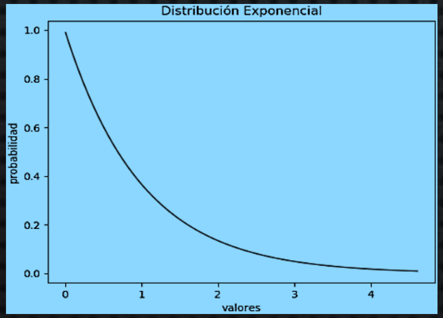


VALOR ESPERADO Y VARIANZA DE LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

El valor esperado de una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda > 0$ es:

$$E[X] = \int_0^\infty x\lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

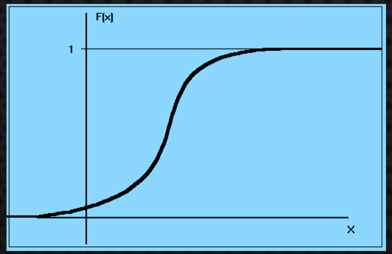
$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

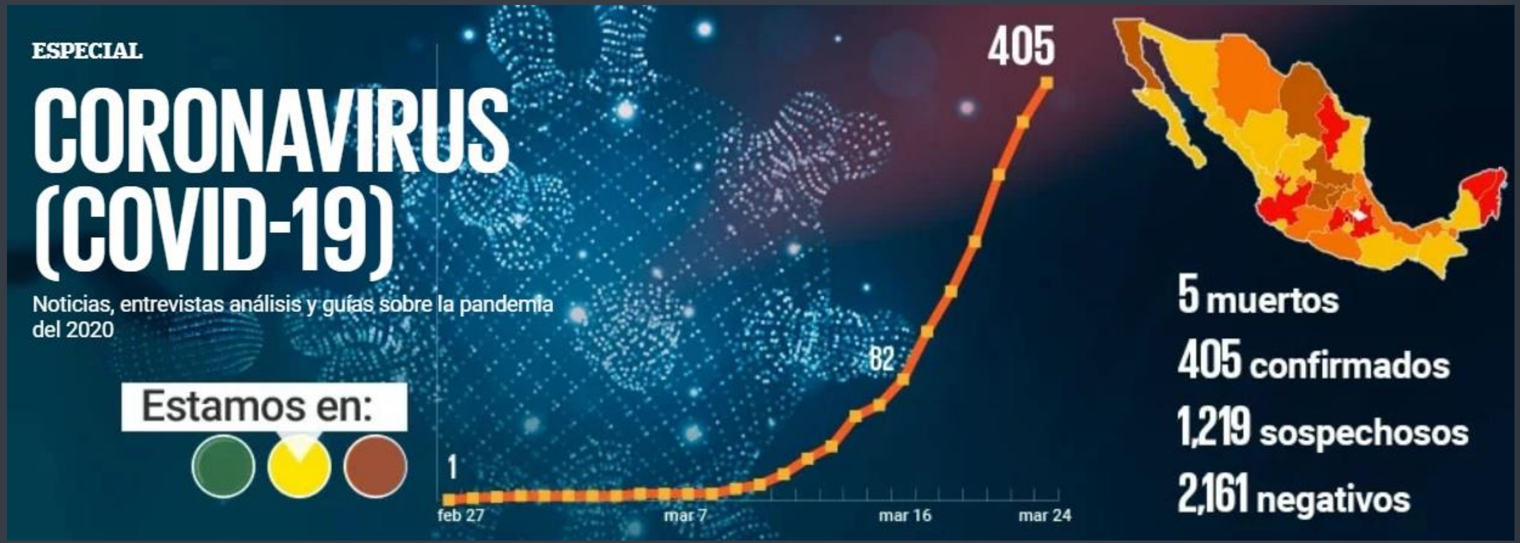


LA DISTRIBUCIÓN DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA

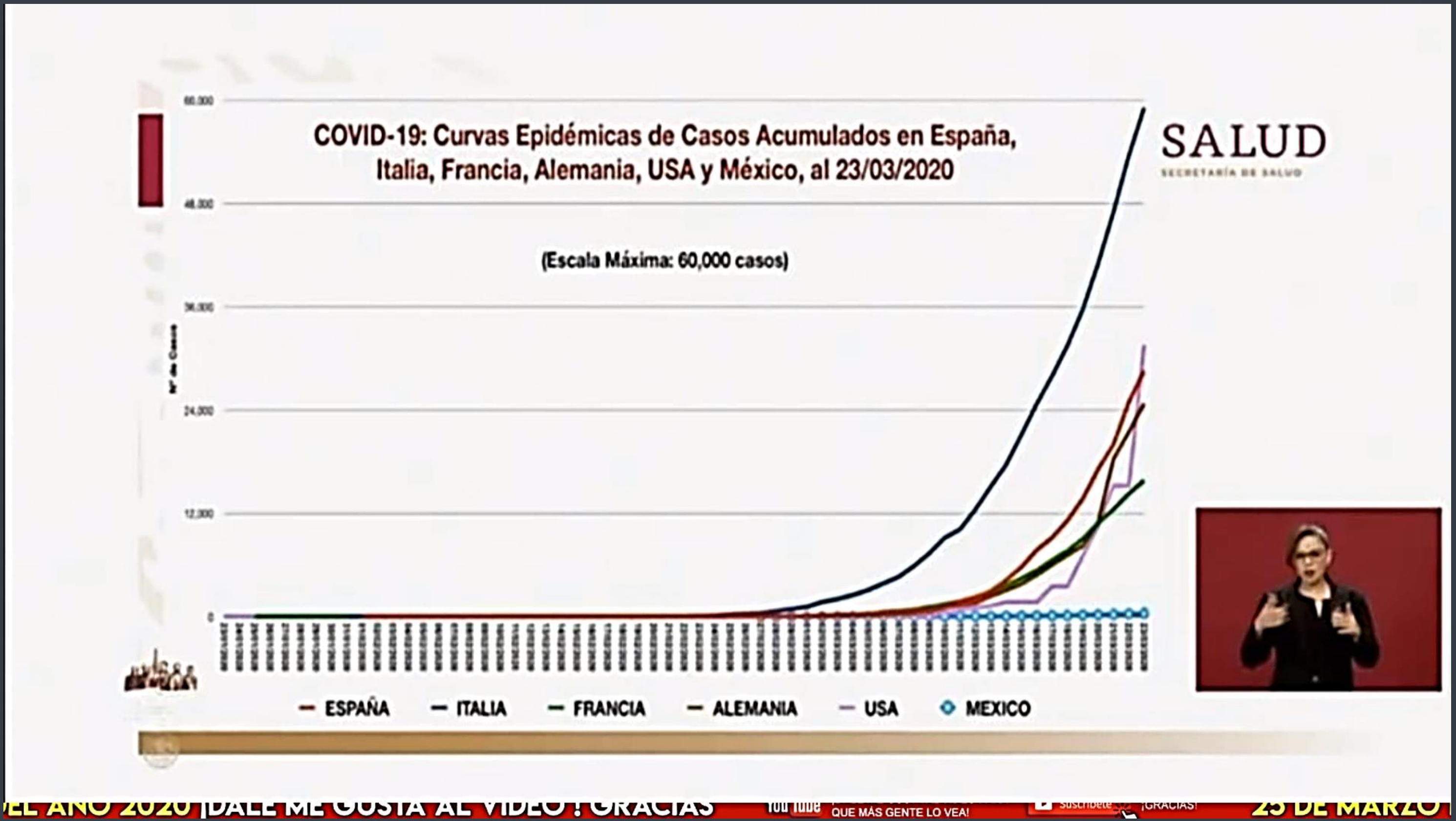
Sea X una v.a. con f.d.p. f_X. Supongamos que g(x) es una función de x estrictamente monótona (creciente o decreciente), diferenciable (por consiguiente continua). Entonces la variable aleatoria Y definida por Y = g(X) tiene una f.d.p. dada por

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)] \left| \dfrac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| & si\ y = g(x)\ para\ algún\ x \\ 0 & si\ y \neq g(x)\quad para\ todo\ x \end{cases}$$





LA ALEATORIEDAD SIEMPRE ESTÁ PRESENTE



LA PREVENCIÓN TAMBIÉN

MUCHAS GRACIAS!!!

jzacarias@fcfm.buap.mx
jdzacariasf@Gmail.com