PROPIEDADES DE LA ESPERANZA

Dr. José Dionicio Zacarias Flores

DEFINICIÓN DE VALOR ESPERADO

El valor esperado de una variable aleatoria X se define por:

$$E(X) = \sum_x x\, p(x)$$

si X es discreta con función de masa de probabilidad p(x), y

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f(x).

ESPERANZA DE SUMAS DE VARIABLES ALEATORIAS

Si X y Y tienen una función de masa de probabilidad conjunta p(x,y), entonces:

$$E[g(X, Y)] = \sum_{y} \sum_{x} g(x, y)p(x, y)$$

Si X y Y tienen una función de densidad de probabilidad conjunta f(x,y), entonces:

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f(x, y)\, dx\, dy$$

En el caso particular que g(X,Y) = X + Y, sin importar si son discretas continuas, E[X+Y] = E[X] + E[Y]. La misma propiedad se cumple para n variables aleatorias.

COVARIANZA, VARIANZA DE SUMAS, Y CORRELACIONES

TEOREMA

Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces para cualesquiera funciones h y g,

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

Demostración.

$$E[g(X)h(Y)] = \sum_{y}\sum_{x} g(x)h(y)p(x,y)$$

$$= \sum_x g(x)\,p(x) \sum_y h(y)p(y) \quad por\ ser\ independientes$$

$$= E[g(X)]E[h(Y)]\ por\ definición\ de\ valor\ esperado\ \ \#$$

La demostración es análoga para el caso continuo.

DEFINICIÓN

La covarianza entre X y Y, denotada por Cov(X,Y) = E[(X-E[X]) (Y-E[Y])], desarrollando la parte derecha, se tiene Cov(X,Y) = E[XY] - E[X] E[Y]

Si X y Y son independientes, Cov(X,Y) = 0, pero lo recíproco no es verdadero.

La varianza de la suma de n variables aleatorias es:

$$\boxed{\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i) + 2 \sum_{i<j}\sum \operatorname{Cov}(X_i, X_j)}$$

La correlación de dos variables aleatorias X y X denotada por ρ(X,Y) es:

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}}$$

$$-1 \le \rho(X, Y) \le 1$$

TEOREMA

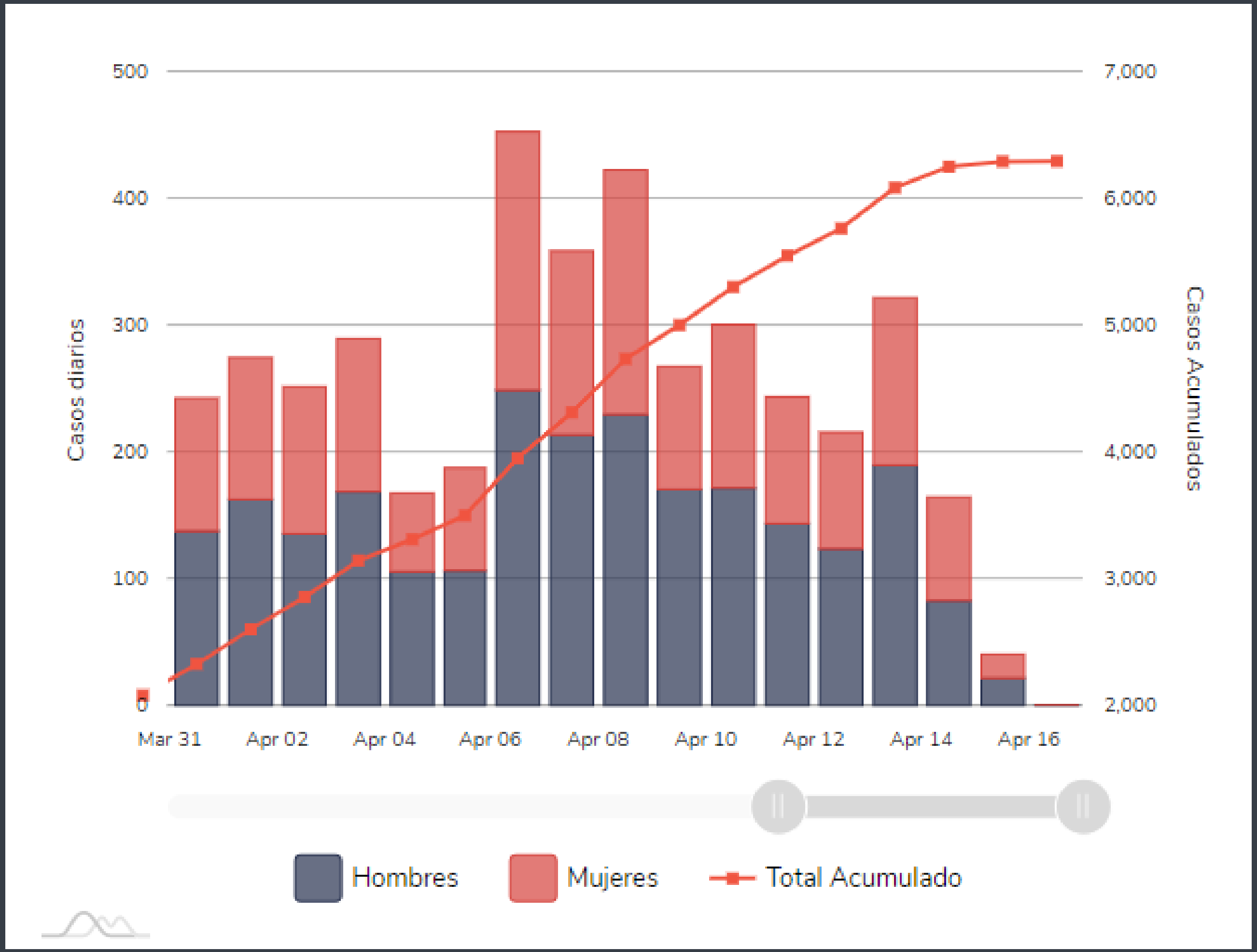
(i) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$

(ii) $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$

(iii) $\text{Cov}(aX, Y) = a\,\text{Cov}(X, Y)$

(iv) $\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \text{Cov}(X_i, Y_j)$

LA ALEATORIEDAD SIEMPRE ESTÁ PRESENTE



LA PREVENCIÓN TAMBIÉN

MUCHAS GRACIAS!!!

jzacarias@fcfm.buap.mx
jdzacariasf@Gmail.com