Teoremas Límites

DR. JOSÉ DIONICIO ZACARIAS FLORES

RESUMEN EXTRAÍDO DEL LIBRO: **A FIRST COURSE IN PROBABILITY (SHELDON ROSS)**

INTRODUCCIÓN

En este tema se aprenden un conjunto de teoremas que están relacionados a ciertas características respecto al promedio de una serie de variables aleatorias que convergen al promedio esperado.

Desigualdad de Markov’s

Si X es una variable aleatoria que toma solo valores no negativos, entonces para cualquier valor $a > 0$,

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E[X]}{a}$$

Nota. Este teorema sirve para tener una cota en el cálculo de la probabilidad, principalmente cuando sólo se tiene el valor esperado.

Desigualdad de Chebyshev’s

Si X es una variable aleatoria con media finita μ y varianza σ^2, entonces para cualquier valor $k > 0$

$$P\{|X - \mu| \geq k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Nota. Este teorema al igual que el anterior sirve para tener una cota en el cálculo de la probabilidad, principalmente cuando sólo se tiene el valor esperado y su varianza.

Revisar los ejemplos 2a y 2b del capítulo 8, página 396 y 397.

Teorema.

Si $Var(X) = 0$, entonces

$P\{X = E[X]\} = 1$

Interpretación: Este teorema nos dice que si los valores de X no cambian ($Var(X) = 0$), entonces siempre debemos esperar que se tenga el mismo valor, por lo tanto $E[X] = X$, es un evento seguro.

Teorema (Ley Débil de los Grandes Números)

- Sean $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cada una teniendo media finita $E[X_i]$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

- Interpretación: este resultado nos dice que conforme el número de valores crece (los $X_i = x_i$), la media aritmética se va acercando al valor del parámetro μ, por lo que a la larga ambos valores serán casi iguales, así, si necesitamos la media μ, la podemos aproximar utilizando la media aritmética siempre que los x_i sean una cantidad de valores suficientemente grandes.

Teorema del Límite Central (TLC)

- Sean X_1, X_2, … una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cada una teniendo media μ y varianza $\sigma 2$. Entonces, la distribución de
- $$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \qquad (*)$$
- Tiende a la normal estándar cuando $n \to \infty$. Es decir, para $-\infty < a < \infty$.
- $$P\left\{\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}\,dx$$ cuando $n \to \infty$

Interpretación del TLC

- El teorema nos dice que si construimos un cociente como (*) su distribución de probabilidad se comporta como una distribución normal, por lo que

$$P\{(*) \leq a\} \rightarrow \Phi(a)$$

Siempre que n → ∞

Teorema: Ley Fuerte de los Grandes Números

Ejemplos

- Se recomienda que se revisen los ejemplos 3a – 3d, del capítulo 8, de las páginas 401 a 406.

Otras desigualdades

Desigualdad de Chebyshev unilateral

- Si X es una variable aleatoria con media 0 y varianza σ^2, entonces para cualquier $a > 0$

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

Corolario

- Si E[X] = μ y Var(X) = σ^2, entonces para $a > 0$

$$P\{X \geq \mu + a\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

$$P\{X \leq \mu - a\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

Teorema: Cotas de Chernoff

$$P\{X \geq a\} \leq e^{-ta} M(t) \quad \text{for all} \quad t > 0$$

$$P\{X \leq a\} \leq e^{-ta} M(t) \quad \text{for all} \quad t < 0$$

Definición

- Una función $f(x)$ con valores en los reales se dice que es convexa si $f''(x) \geq 0$ para toda x; similarmente, se dice que es cóncava si $f''(x) \leq 0$.

Teorema (Desigualdad de Jensen’s)

- Si f(x) es una función convexa, entonces

$$E[f(X)] \geq f(E[X])$$

- Probando que los valores esperados existen y son finitos.

Ejemplos

- Se recomienda revisar los ejemplos 5a a 5f de las páginas 413 a 418.

Problemas

Asignación de problemas del capítulo 8

- SERIE 1:
- Sección problemas: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19
- Sección ejercicios teóricos: 1, 3, 9, 10
- SERIE 2:
- Sección problemas: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20
- Sección ejercicios teóricos: 2, 3, 6, 8
- SERIE 3:
- Sección problemas: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21
- Sección ejercicios teóricos: 3, 7, 9, 13

Temas selectos de exposición

Selección de temas para exposición oral

- Cadenas de Markov
- Procesos de Poisson
- Teoría de codificación y entropía