Espacio de Probabilidad

$$(\quad \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}, \quad \boldsymbol{P} \quad)$$

Espacio muestral, $\sigma - \text{á}\boldsymbol{lgebra},$ **Medida de probabilidad**

Espacio muestral

- Ω es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento aleatorio en cuestión.

Ejemplo de Ω

- Considere el experimento aleatorio de participar en un juego de lotería. Suponga que hay un millón de números en esta lotería y un jugador participa con un boleto.

¿Cuál es un posible espacio muestral para este experimento si únicamente uno de los posibles números es el ganador?

- $\Omega = \{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\} = \{x \mid x \epsilon \mathbb{Z}\ y\ x \leq 1\,000\,000\}$

- Ω= {“ganar”, “perder”}

Ejemplo de $\boldsymbol{\Omega}$

- El experimento consta de lanzar una moneda y un dado al mismo tiempo ¿Cuál es el espacio muestral?

- $\boldsymbol{\Omega} = \{(\text{á}guila, 1), (\text{á}guila, 2), \ldots, (\text{á}guila, 6), (sol, 1), (sol, 2), \ldots, (sol, 6)\}$

- Sea A={águila, sol}, B={1,2,3,4,5,6}

$\boldsymbol{\Omega}$= $\{(x, y) | x \in A \text{ y } y \in B\} = A \times B$

$\sigma-$álgebra $\mathcal{F}$

Definición. (σ-álgebra, espacio medible, evento). Una colección $\mathscr{F}$ de subconjuntos de Ω es una σ-álgebra si cumple las siguientes condiciones:

1. $\Omega \in \mathscr{F}$.
2. Si $A \in \mathscr{F}$, entonces $A^c \in \mathscr{F}$.
3. Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

A la pareja $(\Omega, \mathscr{F})$ se le llama espacio medible y a los elementos de $\mathscr{F}$ se les llama eventos o conjuntos medibles.

Ejemplo de $\mathcal{F}$

1. $\mathcal{F} = \{\emptyset\ , \boldsymbol{\Omega}\}$
2. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{c}}\ \boldsymbol{\Omega}\}$
3. $\mathcal{F} = \boldsymbol{2}^{\boldsymbol{\Omega}}$

Medida de probabilidad P

- Una función P tal que $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ es una **medida de probabilidad** si

Axiomas de la probabilidad

1. $P(A) \geqslant 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ cuando $A_1, A_2, \ldots$ son ajenos dos a dos.

Ejemplo de P

PROBABILIDAD CLÁSICA

- $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ donde $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ y Ω finito y equiprobable

Definición 1.2 Sea A un subconjunto de un espacio muestral Ω de cardinalidad finita. Se define la probabilidad clásica del evento A como el cociente:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega},$$

en donde el símbolo #A denota la cardinalidad o número de elementos del conjunto A.

Se lanza un dado equilibrado.

¿Cuál es la probabilidad (clásica) del evento A="obtener un número par"

- $\boldsymbol{\Omega}= \{1, 2, 3,4,5,6\}$
- $A = \{2,4,6\}$
- $$P(A) = \frac{\#\{2,4,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Se verifica que esta forma de calcular probabilidades cumple los 3 Axiomas

Ejemplo de ***P***

PROBABILIDAD GEOMÉTRICA

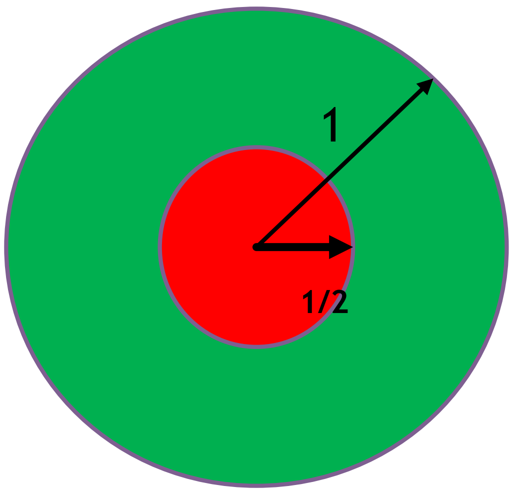
Definición 1.3 Si un experimento aleatorio tiene como espacio muestral $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cuya área está bien definida y es finita, entonces se define la probabilidad geométrica de un evento $A \subseteq \Omega$ como

$$P(A) = \frac{\text{Área de } A}{\text{Área de } \Omega},$$

cuando el concepto de área del subconjunto A está bien definido.

Se verifica que esta forma de calcular probabilidades cumple los 3 Axiomas

¿Cuál es la probabilidad de que una dardo lanzado al azar sobre un tablero circular de radio unitario caiga en el círculo circunscrito de radio 1/2?



Ω= “Círculo verde”

A=“el dardo cae en el círculo rojo”

$$P(A) = \frac{\acute{A}rea\ de\ A}{Area\ de\ \Omega} = \frac{\pi/4}{\pi} = \frac{1}{4}$$

Ejercicios

- Se prueba un artefacto electrónico y se anota el tiempo de uso, digamos t

a) Encuestra el espacio muestral del experimento

b) Si $A = \{t|t < 100\}$, $B = \{t|20 \leq t \leq 200\}$, $C = \{t \mid t < 200\}$

Obtenga $AUB, A \cap B,\ A^c,\ \ (B \cup C)^c$

Ejercicios

- En un periodo de 24 hrs, en un momento x un interruptor se pone en la posición de "encendido". Posteriormente, en un momento y (todavía en el periodo de 24 hrs.) el interruptor se pone en la posición de "apagado".
- Supongamos que x y y se miden en horas en el mismo eje del tiempo con el comienzo del periodo como origen. El resultado del experimento consta del par de números (x,y).

a) Obtenga el espacio muestral

b) Describa y dibuje los siguientes eventos en el plano xy

    i. El circuito funciona durante una hora o menos

    ii. El circuito funciona en el tiempo z donde z es algún intervalo durante el periodo de 24 hrs.

    iii. El circuito funciona el doble de lo que está interrumpido.

Propiedades Elementales

Proposición 1.1 $P(\varnothing) = 0$.

Demostración. Tomando $A_1 = A_2 = \cdots = \varnothing$ en el tercer axioma tenemos que

$$P(\varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots .$$

La única solución de esta ecuación es $P(\varnothing) = 0$. •

Proposición 1.2 Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una colección finita de eventos ajenos dos a dos. Entonces

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

En particular, cuando $A \cap B = \varnothing$ se cumple la identidad

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Demostración. Definiendo $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$ se verifica que esta sucesión infinita sigue siendo ajena dos a dos y por lo tanto, usando el tercer axioma, tenemos que

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) &= P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k). \end{aligned}$$

Proposición 1.3 Para cualquier evento A, $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Demostración. De la teoría elemental de conjuntos tenemos que $\Omega = A \cup A^c$, en donde A y A^c son eventos ajenos. Aplicando el tercer axioma tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) \\ &= P(A \cup A^c) \\ &= P(A) + P(A^c). \end{aligned}$$

•

Proposición 1.4 Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leqslant P(B)$.

Demostración. Primeramente escribimos $B = A \cup (B - A)$. Como A y $B - A$ son eventos ajenos, por el tercer axioma, $P(B) = P(A) + P(B - A)$. Usando el primer axioma concluimos que $P(B) - P(A) = P(B - A) \geqslant 0$. De aquí obtenemos $P(B) - P(A) \geqslant 0$. •

Proposición 1.5 Si $A \subseteq B$, entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

Demostración. Como $B = A \cup (B - A)$, siendo esta unión ajena, por el tercer axioma tenemos que $P(B) = P(A) + P(B - A)$. •

Proposición 1.6 Para cualquier evento A, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Demostración. Como $A \subseteq \Omega$, se tiene que $P(A) \leqslant P(\Omega) = 1$. La primera desigualdad, $0 \leqslant P(A)$, es simplemente el primer axioma. •

Proposición 1.7 Para cualesquiera eventos A y B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demostración. Primeramente observamos que para cualesquiera eventos A y B se cumple la igualdad $A - B = A - (A \cap B)$, en donde $A \cap B \subseteq A$, de modo que $P(A - (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B)$. Entonces escribimos a $A \cup B$ como la unión disjunta de los siguientes tres eventos:

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) \\ &= (A - (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B - (A \cap B)). \end{aligned}$$

Ahora aplicamos la probabilidad. Por el tercer axioma,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A - (A \cap B)) + P(A \cap B) + P(B - (A \cap B)) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Proposición 1.8 Para cualesquiera eventos A, B y C,

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ & + P(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Demostración. Agrupando adecuadamente y usando la fórmula para dos eventos,

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) &= P[(A \cup B) \cup C] \\ &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ &\quad - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &\quad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Proposición. (Desigualdades de Boole). Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de eventos. Entonces

1. $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.
2. $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c)$.

Demostración.

1. Tome $B_1 = A_1$, y para $n \geq 2$ defina
$$B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$
Hemos demostrado antes que $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de eventos disjuntos dos a dos tales que $B_n \subseteq A_n$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Por lo tanto
$$\begin{aligned} P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

2. Esta desigualdad se sigue de la primera al considerar la sucesión de los complementos.

Ejercicios:

1 $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

2 $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

3 Determine si las siguientes funciones son medidas de probabilidad.

a) $P(\Omega) = 1$ y $P(A) = 0$ para cualquier otro evento A.

b) $P(\emptyset) = 0$ y $P(A) = 1$ para cualquier otro evento A.

4 Sean A y B eventos tales que $P(A) = p$, $P(B) = q$ y $P(A \cap B) = r$. Encuentre:

a) $P(A \cap B^c)$.

b) $P(A^c \cap B)$.

c) $P(A^c \cap B^c)$.

d) $P(A \triangle B)$.

5 Sea A, B y C tres eventos tales que $P(A) = P(B) = 1/3$, $P(C) = 1/4$, $P(A \cap B) = 1/6$ y $P(B \cap C) = 0$. Encuentre $P(A \cap B \cap C)$.

6 Demuestre que la probabilidad de que exactamente uno de los eventos A o B ocurra es $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

7 Sean A, B y C tres eventos. Demuestre que la probabilidad de que exactamente:

a) uno de estos eventos ocurra es $P(A) + P(B) + P(C) - 2P(A \cap B) - 2P(A \cap C) - 2P(B \cap C) + 3P(A \cap B \cap C)$.

b) dos de estos eventos ocurran es $P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 3P(A \cap B \cap C)$.

c) tres de estos eventos ocurran es $P(A \cap B \cap C)$.

¿Cuál es el evento que se obtiene al unir estas tres condiciones?

8 Sean P y Q dos medidas de probabilidad definidas sobre la misma colección de eventos. Demuestre que para cada $\alpha \in [0, 1]$ la función $\alpha P + (1 - \alpha)Q$ es también una medida de probabilidad.