# INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS

"EL FUTURO ES IMPREDECIBLE, TODO SE BASA EN PROBABILIDADES", RICHARD FEYNMAN

# DEFINICIÓN

- Se dice que dos variables aleatorias X e Y son independientes si para cada intervalo A y cada intervalo B, $P(X \in A \text{ e } Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$.

# PROPIEDAD

- Las variables aleatorias continuas X e Y son independientes si y solo si hay funciones g (x) y h (y) tales que

$$f_{X,Y}(x, y) = g(x)\, h(y) \qquad (*)$$

- Si se cumple la ecuación (*), hay una constante k tal que

$$f_X(x) = kg(x) \text{ y } f_Y(y) = (1 / k)\, h(y).$$

# DEMOSTRACIÓN

- =) Supongamos que X e Y son independientes.
- Entonces $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)\, P(Y \leq y) = F_X(x)\, F_Y(y)$
- Entonces

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F_X(x) F_Y(y) = \frac{d}{dx} F_X(x) \frac{d}{dy} F_Y(y) = f_X(x) f_Y(y)$$

# DEMOSTRACIÓN

- (= Supongamos ahora que la ecuación (*) se cumple. Note que

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)\,dy = g(x)\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\,dy$$

- Haciendo $k = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\,dy$, así $f_X(x) = kg(x)$.
- De modo similar puede verse que $f_Y(y) = (1/k)h(y)$.
- Así,

$$\begin{aligned} P(X \in A \text{ and } Y \in B) &= \int_A \int_B f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_A \int_B g(x)h(y)\,dx\,dy \\ &= \int_A \int_B kg(x)(1/k)h(y)\,dx\,dy = \int_A f_X(x)\,dx \int_B f_Y(y)\,dy \\ &= P(X \in A)P(Y \in B) \end{aligned}$$

- De modo análogo es el caso discreto.

# INDEPENDENCIA DE N VARIABLES

- Se dice que las n variables aleatorias $X_1$, $X_2$, …, Xn son independientes si hay funciones $g_1(x_1)$, $g_2(x_2)$,. . . , $g_n(x_n)$ tal que para cada
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- $f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, xn) = g(x_1), g(x_2) \cdots g(x_n)$
- Una declaración similar es válida para las variables aleatorias discretas, en cuyo caso f se reemplaza por p.

# MUESTRAS ALEATORIAS

- Sea $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ un conjunto de n variables aleatorias independientes, todas con la misma PDF. Entonces se dice que $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ son una muestra aleatoria de tamaño n.

# TAREA DE CLASE

# PROBLEMA 1

- Se lanzan dos dados justos. Sea X el número que aparece en el primer dado e Y el número en el segundo.
  Demuestre que X e Y son independientes.

# PROBLEMA 2

- Sea $f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$, $0 \leq x$, $0 \leq y$. Demuestre que X e Y son independientes. ¿Cuáles son los PDF marginales en este caso?

# PROBLEMA 3

- Suponga que cada una de las dos urnas tiene cuatro fichas, numeradas del 1 al 4. Se saca una ficha de la primera urna y lleva el número X. Esa ficha se agrega a la segunda urna. Luego se saca una ficha de la segunda urna. Llame a su número Y.
- (a) Encuentre $p_{X,Y}(x, y)$.
- (b) Muestre que $p_X(k) = p_Y(k) = ¼$ , $k = 1, 2, 3, 4$.
- (c) ¿Son X e E independientes?

# PROBLEMA 4

- Sean X e Y variables aleatorias con pdf conjunto
- $f_{X,Y}(x,y) = k,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq 1$
- Da un argumento geométrico para demostrar que X e Y no son independientes.

# PROBLEMA 5

- ¿Son las variables aleatorias X e Y independientes si

$$f_{X,Y}(x, y) = (2/3)\,(x + 2y),\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1?$$

# PROBLEMA 6

- Suponga que $f_{X,Y}(x,y) = xye^{-(x+y)}$, $x > 0$, $y > 0$.

  Demuestre para cualquier número real a, b, c y d que

  $P(a < X < b, c < Y < d) = P(a < X < b) \cdot P(c < Y < d)$