VALOR ESPERADO

"EL QUE ESPERA DESESPERA", REFRÁN POPULAR

PROPIEDAD 1

- Si X y Y son variables aleatorias discretas y p(x,y) es el valor de su distribución de probabilidad conjunta en (x,y), el valor esperado de la variable aleatoria g(X,Y) está dado por

$$E(g(X,Y)) = \sum_{x}\sum_{y} g(x,y)p(x,y)$$

- De modo análogo, si X y Y son variables aleatorias continuas y f(x,y) es el valor de su densidad conjunta en (x,y), el valor esperado de la variable aleatoria g(X,Y) está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dx\,dy$$

EJEMPLO

- Si la función de densidad conjunta de X y Y es dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{7}(x+2y) & para\ 0 < x < 1, 1 < y < 2 \\ 0 & en\ cualquier\ otra\ parte \end{cases}$$

- Obtener el valor esperado de $g(X,Y) = X/Y^3$

SOLUCIÓN

- Por la propiedad 1, se tiene

$$E(X/Y^3) = \int_1^2 \int_0^1 \frac{2x(x+2y)}{7y^3}\, dx\, dy = \frac{2}{7}\int_1^2 \left(\frac{1}{3y^3} + \frac{1}{y^2}\right) dy = \frac{15}{84}$$

PROPIEDAD 2

- Si c_1, c_2, …, y c_n son constantes, entonces
- $E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(X_1, X_2, \dots, X_k)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i E\left[g_i(X_1, X_2, \dots, X_k)\right]$

EJEMPLOS DE CLASE

EJEMPLO 1

- Dadas las dos variables aleatorias continuas X y Y, expresar E(X) en término de:
- A) la densidad conjunta de X y Y;
- B) la densidad marginal de X

SOLUCIÓN

- A) Utilizar $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dx\, dy$
- B) Utilizar $\int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x)\, dx$

EJEMPLO 2

- La variable aleatoria X toma los valores 0, 1, 2 y 3 con probabilidades respectivas de 1/125, 12/125, 48/125, 64/125, determine
- A) $E(X)$ y $E(X^2)$
- B) Utilizando los resultados del inciso A) obtenga $E[(3X + 2)^2]$

SOLUCIÓN

- A) 2.4, 6.24
- B) 88.96

EJEMPLO 3

- De un grupo de tres republicanos, dos demócratas y uno independiente se ha de seleccionar aleatoriamente un comité de dos personas. Denote con Y_1 el número de republicanos y con Y_2 el número de demócratas del comité. Encuentre la función de probabilidad conjunta de Y_1 y Y_2 y luego encuentre la función de probabilidad marginal de Y_2, Y_1. Por último encuentre $E[Y_1-Y_2]$.

SOLUCIÓN

			Y_1		
		0	1	2	
	0	0	3/15	3/15	$6/15 = p_{Y_2}(0)$
Y_2	1	2/15	6/15	0	$8/15 = p_{Y_2}(1)$
	2	1/15	0	0	$1/15 = p_{Y_2}(2)$
		3/15	9/15	3/15	
		$= p_{Y_1}(0)$	$= p_{Y_1}(1)$	$= p_{Y_1}(2)$	

$E[Y_1 - Y_2] = E[Y_1] - E[Y_2] = [0*3/15+1*9/15+2*3/15]-[0*6/15+1*8/15+2*1/15]$

$= [9/15+6/15] – [8/15+2/15] = 1 – 10/15 = 5/15 = 1/3$

TAREA DE CASA

PROBLEMA 1

- Pruebe la propiedad 2 para el caso discreto.

PROBLEMA 2

- Si la distribución de probabilidad conjunta de X, Y y Z está dada por
- $f(x,y,z) = kxyz \quad$ para $x = 1,2$; $y = 1, 2, 3$; $z = 1, 2$
- Determinar:
- A) El valor de k
- B) $P(X = 1, Y \leq 2, Z = 1)$
- C) $P(X = 2, Y + Z = 4)$
- D) El valor esperado de $U = X + Y + Z$

PROBLEMA 3

- Sean X y Y variables aleatorias cuya función de distribución conjunta se muestra en la siguiente tabla

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

- Sea g(X,Y) = 3X -2XY+y, encontrar E[g(X,Y)].

PROBLEMA 4

- Un dado es lanzado10 veces, calcular el valor esperado de la suma de los valores que se muestran en las cara superior del dado. Lo mismo si se lanza 20 veces.

PROBLEMA 5

- Si los valores de la distribución de probabilidad conjunta de X y Y son como se dan en la siguiente tabla

	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$y = 0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$
$y = 1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{40}$
$y = 2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{20}$	
$y = 3$	$\frac{1}{120}$		

- Encontrar
- A) $P(X = 1, Y = 2)$ B) $P(X = 0, 1 \leq Y < 3)$; C) $P(X + Y \leq 1)$; D) $P(X > Y)$
- E) Las marginales de X y E; F) el valor esperado de $E[X^2 + Y^2]$