Momentos y Varianza

Definición

- El r-ésimo momento alrededor del origen de una variable aleatoria X, denotado por μ'_r, es el valor esperado de X', simbólicamente,

$$\mu'_r = E(X^r) = \sum_x x^r \cdot f(x)$$

- Para r = 0, 1, 2, … donde X es discreta, y

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot f(x) dx$$

- Donde X es continua.

Definición

- $\mu'_1 = E(X)$, se llama la ***media*** de la distribución de X, o simplemente la media de X, y se denota con μ.

Definición

- El ***r-ésimo momento*** alrededor de la media de una variable aleatoria X , denotado por μ_r, es el valor esperado de $(X — \mu)^r$; simbólicamente,

$$\mu_r = E[(X-\mu)^r] = \sum_x (x-\mu)^r \cdot f(x)$$

- Para r = 0, 1, 2, … cuando X es discreta, y

$$\mu_r = E[(X-\mu)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r \cdot f(x)$$

- Cuando X es continua.

- **Nota**. El segundo momento es muy importante en la estadística ya que indica la amplitud o dispersión de la distribución de una variable aleatoria, motivo por el cual tiene un símbolo y nombre especial.

Definición

- $\mu_2 = E[(X-\mu)^2]$, se define como la ***varianza*** de la distribución de X, o simplemente la varianza de X, se denota por σ^2, Var(X) o V(X), a la raíz cuadrada de la varianza se le conoce como la ***desviación estándar*** y se denota por σ.

Teorema 1

- $\sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2$

Demostración

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E[(X-\mu)^2] \\
&= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\
&= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) \\
&= E(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \\
&= \mu'_2 - \mu^2
\end{aligned}$$

Teorema 2

- Si X tiene varianza σ^2, entonces

$$V(aX + b) = a^2\,\sigma^2$$

- Dem. Se deja de tarea de casa.
- Nota. Para el caso a = 1, agregamos una constante (b) a la variable aleatoria X, significa desplazar los valores de la variable ya sea a la derecha o izquierda, dependiendo del valor constante.

Ejemplo de clase

- Se tiene el experimento de lanzar un dado, y sea X la variable aleatoria que registra el resultado de la cara superior del dado. Calcular la varianza de X.

Solución

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $p(1) = p(2) = \ldots = p(6) = 1/6$

  Entonces,

$$\mu = E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\mu'_2 = E(X^2) = 1^2 \frac{1}{6} + 2^2 \frac{1}{6} + \cdots + 6^2 \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

- Por lo que

$$\sigma^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

Ejemplo de clase

- Si X es una variable aleatoria exponencial con parámetro λ, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(X^k) &= \int_0^\infty x^k \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= [-x^k \mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty k x^{k-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{k}{\lambda}\mathsf{E}(X^{k-1})
\end{aligned}
$$

- Si k ≥ 1, dado que

Ejemplo de clase (continuación)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(X^k) &= \frac{k}{\lambda}\,\mathsf{E}(X^{k-1}) \\
&= \frac{k(k-1)}{\lambda^2}\,\mathsf{E}(X^{k-2}) = \cdots \\
&= \frac{k!}{\lambda^k}\,\mathsf{E}(X^0) \\
&= \frac{k!}{\lambda^k}\,\mathsf{E}(1) = \frac{k!}{\lambda^k}
\end{aligned}
$$

Tarea de clase

Problema 1

- Si X es una variable aleatoria distribuida uniformemente sobre (a,b), encontrar el k-ésimo momento

Solución

- Para k = 1, 2, …

$$E(X^k) = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(b-a)(k+1)}$$

Problema 2

- Si X es una variable aleatoria distribuida como Gamma, con parámetros w y λ, encontrar el k-ésimo momento

Solución

- Para k = 1, 2, …

$$E\left(X^k\right) = \frac{\Gamma(w+k)}{\lambda^k \Gamma(w)}$$

Problema 3

- Si X es una variable aleatoria distribuida como χ^2, con n grados de libertad, calcular su k-ésimo momento

Solución

- Para k = 1, 2, …

$$E(X^k) = 2^k \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}$$

Continuación de conceptos

Valores esperados de productos: Un caso especial

- Ya sabemos que para cualesquiera dos variables aleatorias X y Y:

$$E(XY) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{para\ toda\ x}\ \sum_{para\ todo\ y} xyp_{X,Y}(x,y) & si\ X\ y\ Y\ son\ discretas \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\ f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy & si\ X\ y\ Y\ son\ continuas \end{cases}$$

- Pero si X y Y son independientes, si E(X) y E(Y) existen, entonces

E(XY) = E(X) E(Y)

Covarianza

- Cuando las variables aleatorias no son independientes, una medida de relación entre las variables es la covarianza, pues es un valor que indica el grado de variación conjunta de dos variables aleatorias respecto a sus medias. Nos permite saber cómo se comporta una variable en función de lo que hace otra variable.
- **Definición**. Dadas las variables aleatorias X y Y con varianzas finitas, se define a la covarianza de X y Y, y se denota por Cov(X,Y) como:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)$$

Teorema 3

- Si X y Y son independientes, entonces $Cov(X,Y) = 0$
- Demostración. Se omite, pero basta con aplicar la definición y el hecho de ser independientes.

- Nota. Lo recíproco no es cierto, si $Cov(X,Y) = 0$ no nos dice si X y Y puedan ser independientes.

Teorema 4

- Suponga que X e Y son variables aleatorias con varianzas finitas y que a y b son constantes. Luego

- $Var(aX + bY) = a^2\ Var(X) + b^2\ Var(Y) + 2ab\ Cov(X,Y)$

Demostración

- Por conveniencia, denotemos a $E(X) = \mu_x$ y $E(Y) = \mu_y$. Entonces $E(aX+bY) = a\,\mu_x + \mu_y\,b$, y
- $Var(aX + bY) = E[(aX+bY)^2] – (a\,\mu_x + \mu_y\,b)^2]$

$= E(a^2X^2 + b^2Y^2 + 2abXY) – (a^2\mu_x{}^2 + b^2\,\mu_y{}^2 + 2ab\mu_x\mu_y)$

$= [E(a^2X^2) - a^2\mu_x{}^2] + [E(b^2Y^2) - b^2\,\mu_y{}^2\,] + [2abE(X,Y) - 2ab\mu_x\mu_y]$

$= a^2[E(X^2) - \mu_x{}^2] + b^2[E(Y^2) - \mu_Y{}^2] + 2ab[E(XY) - \mu_x\mu_{y-}]$

$= a^2Var(X) + b^2\,Var(Y) + 2ab\,Cov(X,Y)$

Notas acerca de la covarianza

- Mientras mayor sea el valor absoluto de la covarianza de X y Y, más grande será la dependencia lineal entre X y Y Los valores positivos indican que X aumenta cuando Y aumenta; los valores negativos indican que X disminuye cuando Y aumenta.
- Si la covarianza es cero, indica que las variables son no correlacionadas y que no se da la dependencia lineal entre X y Y.
- Es difícil determinar que tan fuerte es la dependencia porque se depende de la escala de medición.
- Para evitar ese problema, es conveniente estandarizar su valor, esto se logra mediante el ***coeficiente de correlación*** ρ.

Coeficiente de correlación

- El coeficiente de correlación, es una medida que permite conocer el grado de asociación o dependencia lineal entre dos variables aleatorias cuantitativas (X, Y).

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Nota. $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

Notas

- El signo del coeficiente de correlación es igual al signo de la covarianza, y es una medida del grado de linealidad entre las dos variables.
- $r > 0$ indica que Y aumenta a medida que X aumenta y $r = +1$ implica correlación perfecta, con todos los puntos cayendo en una recta con pendiente positiva.
- Un valor de $r = 0$ implica cero covarianza y que no hay correlación. Un coeficiente negativo de correlación implica una disminución en Y cuando X aumenta, y $r = -1$ implica correlación perfecta, con todos los puntos cayendo en una recta con pendiente negativa.

Varianza condicional

- Al igual que en el caso de valor esperado, podemos definir la varianza condicional como:

$$Var(X|Y) = E[(X - E(X))^2|Y] = E(X^2\,|Y) - (E(X\,|Y))^2 \quad (\#)$$

Teorema 5

- $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[Var(X|Y)] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(X|Y))$

Ejemplo de clase

- Para la fdp conjunta $f_{X,Y}(x,y) = x+y$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, encontrar la varianza de X+Y.

Solución

- Tomar en cuenta que X y Y no son independientes.
- $E(X) = E(Y) = 7/12$, $E(X^2) = E(Y^2) = 5/12$
- $V(X) = 11/144 = V(Y)$ por simetría
- $E(XY) = 1/3$
- $Cov(X,Y) = -1/144$
- $Var(X+Y) = 5/36 = 20/144$

Corolarios

- Supongamos que W_1, W_2, …, W_n son variables aleatorias con varianzas finitas. Entonces

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{a} a_i W_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{Var}(W_i) + 2\sum_{i<j} a_i a_j \mathrm{Cov}(W_i, W_j)$$

- Supongamos que W_1, W_2, …, W_n son variables aleatorias independientes con varianzas finitas. Entonces

$$\mathrm{Var}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \mathrm{Var}(W_1) + \mathrm{Var}(W_2) + \cdots + \mathrm{Var}(W_n)$$

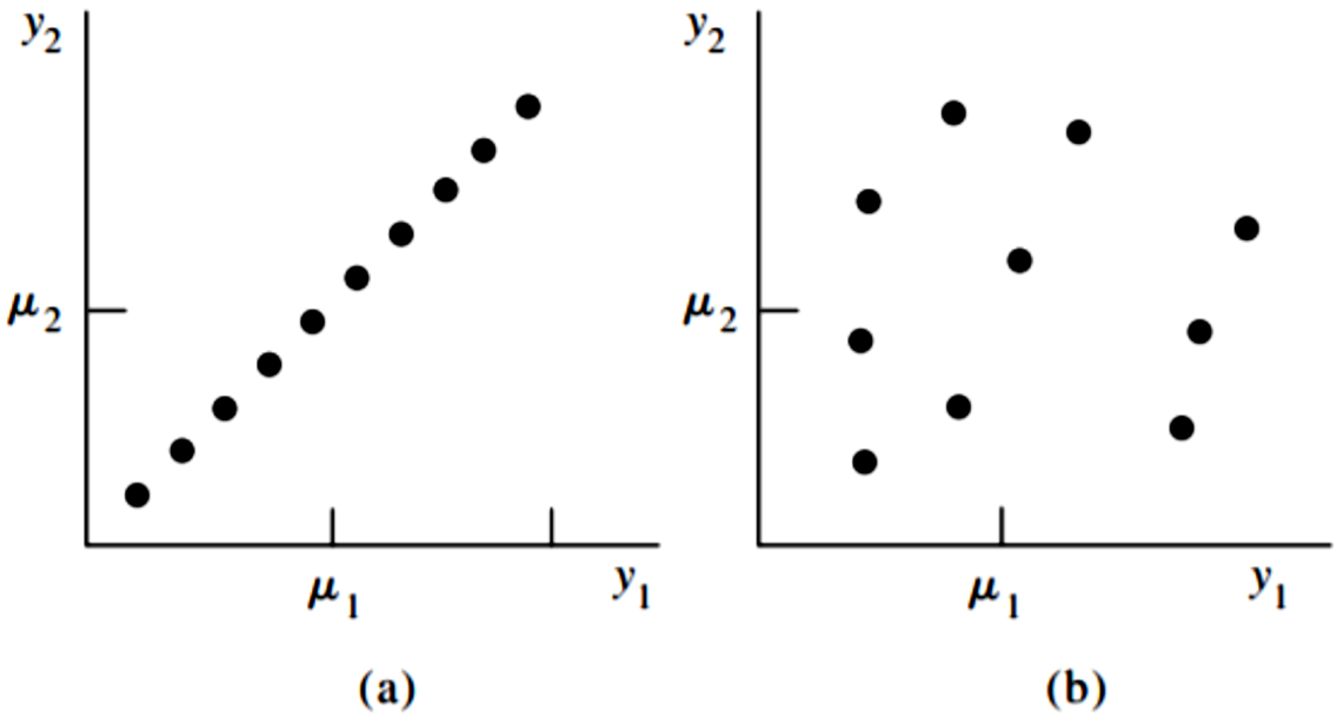
Distribuciones continuas

Distribución	Función de probabilidad	Media	Varianza	Función de generación de momento
Uniforme	$f(y) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}; \theta_1 \le y \le \theta_2$	$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$	$\frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12}$	$\frac{e^{t\theta_2} - e^{t\theta_1}}{t(\theta_2 - \theta_1)}$
Normal	$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(y-\mu)^2\right]$ $-\infty < y < +\infty$	μ	σ^2	$\exp\left(\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$
Exponencial	$f(y) = \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta}; \quad \beta > 0$ $0 < y < \infty$	β	β^2	$(1 - \beta t)^{-1}$
Gamma	$f(y) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\right] y^{\alpha-1} e^{-y/\beta};$ $0 < y < \infty$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	$(1 - \beta t)^{-\alpha}$
Ji cuadrada	$f(y) = \frac{(y)^{(v/2)-1} e^{-y/2}}{2^{v/2}\Gamma(v/2)};$ $y^2 > 0$	v	$2v$	$(1-2t)^{-v/2}$
Beta	$f(y) = \left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\right] y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1};$ $0 < y < 1$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	no existe en la forma cerrada

Distribuciones discretas

Distribución	Función de probabilidad	Media	Varianza	Función de generación de momento
Binomial	$p(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$; $y = 0, 1, \ldots, n$	np	$np(1-p)$	$[pe^t + (1-p)]^n$
Geométrica	$p(y) = p(1-p)^{y-1}$; $y = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
Hipergeométrica	$p(y) = \frac{\binom{r}{y}\binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}}$; $y = 0, 1, \ldots, n$ if $n \leq r$, $y = 0, 1, \ldots, r$ if $n > r$	$\frac{nr}{N}$	$n\left(\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	
Poisson	$p(y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}$; $y = 0, 1, 2, \ldots$	λ	λ	$\exp[\lambda(e^t - 1)]$
Binomial negativa	$p(y) = \binom{y-1}{r-1} p^r (1-p)^{y-r}$; $y = r, r+1, \ldots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$\left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^r$

Observaciones dependientes e independientes para (y_1, y_2)



Tareas de clase

Problema 1

- Suponga que se lanzan dos dados. Sea X el número que aparece en el primer dado y sea Y el mayor de los dos números que aparecen. Encuentre Cov(X, Y).
- R = 105/72 = 1.45833

Problema 2

- Demostrar que
- $Cov(aX+b, cY+d) = acCov(X,Y)$

Problema 3

- Encuentre la covarianza de las variables aleatorias cuya densidad de probabilidad está dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & para\ x > 0, y > 0, x + y < 1 \\ 0 & en\ cualquier\ otra\ parte \end{cases}$$

Solución

- $\mu_X = 1/3 = \mu_Y$
- $E(XY) = 1/12$
- $Cov(X,Y) = -1/36$

Tareas de casa

Problema 1

- Sea U una variable aleatoria distribuida uniformemente en $[0, 2\pi]$. Defina $X = \cos U$ e $Y = \operatorname{sen} U$. Muestre que X e Y son dependientes pero que $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

Problema 2

- Si la densidad de probabilidad conjunta de X y Y está dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}\,(x+2y) & para\; 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & en\; cualquier\; otra\; partre \end{cases}$$

- Encontrar la media condicional y la varianza condicional de X dado Y = ½.

Problema 3

- Suponga que las variables aleatorias X y Y tienen medias μ_x y μ_y y varianzas ${\sigma^2}_X$ y ${\sigma^2}_Y$, respectivamente. Use la definición básica de la covarianza de dos variables aleatorias para establecer que

A) Cov(X, Y) = Cov(Y,X).

B) Cov(X,X) = ${\sigma^2}_X$. Esto es, la covarianza de una variable aleatoria y ella misma son sólo la varianza de la variable aleatoria.

Problema 4

- Un dado es lanzado 10 veces. Calcular la suma esperada de los 10 lanzamientos.

Problema 5

- La fórmula de covarianza condicional. La covarianza condicional de X y Y dado Z, es definida por.

$$Cov(X,Y \mid Z) = E[(X-E[X \mid Z])(Y-E[Y \mid Z])]$$

Demostrar que $Cov(X,Y \mid Z) = E[XY \mid Z] - E[X \mid Z]\, E[Y \mid Z]$