Funciones generadoras de Momentos

Definición

- La función generatriz de momentos de una variable aleatoria X, donde existe, está dada por

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} \cdot f(x)$$

- Cuando X es discreta, y

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)dx$$

- Cuando X es continua.
- Nota. La variable independiente es t por lo que nos interesa valores de t cerca del cero.

Ejemplo

- Encontrar la función generadora de momentos de la variable aleatoria cuya densidad de probabilidad está dada por
- $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & para\, x > 0 \\ 0 & en\, cualquier\, otra\, parte \end{cases}$

Solución

- $M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-x} dx = \frac{1}{1-t}$ para $t < 1$

Teorema 1

- $\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\Big|_{t=0} = \mu'_r$

Demostración. Se omite.

Ejemplo: Distribución Exponencial con parámetro λ

$$
\begin{aligned}
M(t) &= E[e^{tX}] \\
&= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\
&= \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - t)x}\, dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad t < \lambda
\end{aligned}
$$

- Diferenciando e igualando para t = 0, la varianza es:

$$M'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \qquad M''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

$$E[X] = M'(0) = \frac{1}{\lambda} \qquad E[X^2] = M''(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Distribución Normal Unitaria

- Una variable aleatoria Z normal estándar unitaria, con parámetros (0,1), su función generadora de momentos es:

$$
\begin{aligned}
M_Z(t) &= E[e^{tZ}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-x^2/2}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(x^2 - 2tx)}{2} \right\} dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(x - t)^2}{2} + \frac{t^2}{2} \right\} dx \\
&= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2/2}\, dx \\
&= e^{t^2/2}
\end{aligned}
$$

Función generadora de momentos para la suma X+Y

- Supongamos que las variables aleatorias X y Y son independientes, y tienen función generadora de momentos $M_X(t)$ y $M_Y(t)$ respectivamente, entonces, la función generadora de momentos de X+Y es

$$
\begin{aligned}
M_{X+Y}(t) &= E[e^{t(X+Y)}] \\
&= E[e^{tX}e^{tY}] \\
&= E[e^{tX}]E[e^{tY}] \\
&= M_X(t)M_Y(t)
\end{aligned}
$$

Distribuciones de probabilidad discretas

	Probability mass function, $p(x)$	Moment generating function, $M(t)$	Mean	Variance
Binomial with parameters n, p; $0 \leq p \leq 1$	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$ $x = 0, 1, \ldots, n$	$(pe^t + 1 - p)^n$	np	$np(1-p)$
Poisson with parameter $\lambda > 0$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ $x = 0, 1, 2, \ldots$	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$	λ	λ
Geometric with parameter $0 \leq p \leq 1$	$p(1-p)^{x-1}$ $x = 1, 2, \ldots$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Negative binomial with parameters r, p; $0 \leq p \leq 1$	$\binom{n-1}{r-1} p^r(1-p)^{n-r}$ $n = r, r+1, \ldots$	$\left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$

Distribuciones de probabilidad continuas

	Probability mass function, $f(x)$	Moment generating function, $M(t)$	Mean	Variance
Uniform over (a, b)	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\dfrac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponential with parameter $\lambda > 0$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda - t}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Gamma with parameters (s, λ), $\lambda > 0$	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{s-1}}{\Gamma(s)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\left(\dfrac{\lambda}{\lambda - t}\right)^s$	$\dfrac{s}{\lambda}$	$\dfrac{s}{\lambda^2}$
Normal with parameters (μ, σ^2)	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < x < \infty$	$\exp\left\{\mu t + \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$	μ	σ^2

Problemas de clase y casa

Problemas

- **Realizar los problemas 3.145 a 3.149, página 142, del libro Estadística Matemática con Aplicaciones (Wackerly, MendenHall III, Scheaffer), en el link de la página del curso.**

Un poco más de problemas

- Sea X una variable aleatoria con función de masa de probabilidad $p_X(k) = 1/n$, para k = 0, 1, 2, …, n-1, y cero en cualquier otra parte. Demostrar que $M_X(t) = \frac{1-e^{nt}}{n(1-e^t)}$

Un poco más de problemas

- Se extraen dos fichas al azar y sin reemplazo de una urna que contiene cinco fichas, numeradas del 1 al 5. Si la suma de las fichas extraídas es par, la variable aleatoria X es igual a 5; si la suma de las fichas extraídas es impar, $X = -3$. Encuentre la función generadora de momento para X.

Un poco más de problemas

- Encuentre el valor esperado de e^{3X} si X es una variable aleatoria binomial con n = 10 y p =1/3.

Solución

- $E(e^{3X}) = \frac{1}{3^{10}}(2 + e^3)^{10}$

Un poco más de problemas

- Encontrar la función generadora de momentos para la variable aleatoria discreta X cuya función de masa de probabilidad es dada por

$$p_X(k) = \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Un poco más de problemas

- Sea Y una variable aleatoria continua con

$$f_Y(y) = ye^{-y}, 0 \leq y.$$

- Demostrar que

$$M_Y(t) = \frac{1}{(1-t)^2}.$$