Esperanza Condicional

INSERTE SU NOMBRE AQUÍ

Probabilidad condicional

Si X e Y son variables aleatorias discretas, entonces es natural definir la función de masa de probabilidad condicional de X dado que Y = y, por

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x|y) &= P\{X = x | Y = y\} \\ &= \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}} \\ &= \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} \end{aligned}$$

Para todos los valores de y tal que P[Y = y] > 0

Función de distribución condicinal

- La función de distribución de probabilidad condicional de X dado que Y = y se define, para todo y tal que P{Y = y}> 0, por

$$
\begin{aligned}
F_{X|Y}(x|y) &= P\{X \leqslant x | Y = y\} \\
&= \sum_{a \leqslant x} p_{X|Y}(a|y)
\end{aligned}
$$

Esperanza condicional

- La esperanza condicional de X dado que Y = y está definida por

$$E[X|Y=y] = \sum_x xP\{X=x|Y=y\}$$
$$= \sum_x xp_{X|Y}(x|y)$$

Ejemplo

- Suponga que $p(x, y)$, la función de masa de probabilidad conjunta de X e Y, está dada por

  $p(1, 1) = 0.5$, $p(1, 2) = 0.1$, $p(2, 1) = 0.1$,

  $p(2, 2) = 0.3$
- Calcular la f.m.p de X dado que Y = 1.

Solución

$$p_Y(1) = \sum_x p(x,1) = p(1,1) + p(2,1) = 0.6$$

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(1|1) &= P\{X = 1|Y = 1\} \\ &= \frac{P\{X = 1, Y = 1\}}{P\{Y = 1\}} \\ &= \frac{p(1,1)}{p_Y(1)} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Ejemplo

- Si X_1 y X_2 son variables aleatorias binomiales independientes con respectivos parámetros (n_1, p) y (n_2, p), calcular la función de masa de probabilidad condicional de X_1 dado que $X_1 + X_2 = m$.

Solución

- Definiendo q = 1-p

$$
\begin{aligned}
P\{X_1 = k | X_1 + X_2 = m\} &= \frac{P\{X_1 = k, X_1 + X_2 = m\}}{P\{X_1 + X_2 = m\}} \\
&= \frac{P\{X_1 = k, X_2 = m - k\}}{P\{X_1 + X_2 = m\}} \\
&= \frac{P\{X_1 = k\}P\{X_2 = m - k\}}{P\{X_1 + X_2 = m\}} \\
&= \frac{\binom{n_1}{k} p^k q^{n_1 - k} \binom{n_2}{m-k} p^{m-k} q^{n_2 - m + k}}{\binom{n_1 + n_2}{m} p^m q^{n_1 + n_2 - m}}
\end{aligned}
$$

Solución

- Hemos usado que $X_1 + X_2$ es una variable aleatoria binomial con parámetros $(n_1 + n_2, p)$.
- Por tanto, la función de masa de probabilidad condicional de X_1, dado que $X_1 + X_2 = m$, es

$$P\{X_1 = k | X_1 + X_2 = m\} = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{m-k}}{\binom{n_1+n_2}{m}}$$

Problemas de clase

Problema 1

- X e Y son variables aleatorias de Poisson independientes con medias respectivas λ_1 y λ_2, calcule el valor condicional esperado de X dado que $X + Y = n$.

Solución

$$P\{X=k|X+Y=n\}=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!}\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\left[\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$=\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

Solución

- En otras palabras, la distribución condicional de X dado que X + Y = n es la distribución binomial con los parámetros n y $\lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2)$. Por lo tanto,

$$E\{X|X+Y=n\} = n\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Problema

- Hay n componentes. En un día lluvioso, el componente i funcionará con probabilidad p_i; en un día sin lluvia, el componente i funcionará con probabilidad q_i, para $i = 1, \ldots, n$. Mañana lloverá con probabilidad α.
- Calcule el número condicional esperado de componentes que funcionarán mañana, dado que llueve.

Solución

- Haciendo $X_i = \begin{cases} 1 \; si \; la \; componente \; i \; funcional \; el \; día \; de \; mañana \\ 0 \qquad\qquad en \; cualquier \; otro \; caso \end{cases}$

$$E\left[\sum_{t=1}^{n} X_i | Y = 1\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i | Y = 1]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Problema

La función de masa de probabilidad de X e Y es:

$$p(1,1)=\tfrac{1}{9},\quad p(2,1)=\tfrac{1}{3},\quad p(3,1)=\tfrac{1}{9},$$
$$p(1,2)=\tfrac{1}{9},\quad p(2,2)=0,\quad p(3,2)=\tfrac{1}{18},$$
$$p(1,3)=0,\quad p(2,3)=\tfrac{1}{6},\quad p(3,3)=\tfrac{1}{9}$$

Calcular E$[X|Y=i]$